

Композиции движений

Для успешной сдачи этого листка необходимо решить все задачи с кружочками и две трети задач без кружочков.

1°. В каких случаях композиция двух поворотов не является поворотом? Каким движением она может быть?

2°. Замкнуты ли относительно композиции следующие классы движений (то есть верно ли, что композиция двух движений из класса — снова движение из того же класса): центральные симметрии? параллельные переносы? повороты? параллельные переносы и повороты? симметрии? скользящие симметрии? симметрии и скользящие симметрии?

3°. Докажите, что ограниченное (то есть содержащееся в каком-то круге) подмножество точек плоскости имеет не более одного центра симметрии. Докажите, что никакое подмножество точек плоскости не имеет ровно двух центров симметрии. Докажите, что если подмножество точек плоскости имеет ровно две оси симметрии, то они перпендикулярны.

4 (теорема Наполеона). На сторонах треугольника ABC вовне построены равносторонние треугольники ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 . Отмечены их центры O_1 , O_2 и O_3 . Используя композиции поворотов, докажите, что треугольник $O_1O_2O_3$ равносторонний.

5. Для данного треугольника $A_1B_1C_1$ постройте треугольник ABC такой, что треугольники ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 равносторонние.

6. Впишите в данную окружность n -угольник, стороны которого параллельны заданным n прямым.

Подсказка: эта задача похожа на построение многоугольника по серединам сторон и тоже зависит от чётности числа n .

7. На плоскости даны два равных треугольника ABC и $A'B'C'$. Для первого указан порядок вершин — это обход по часовой стрелке, для второго — против. Докажите, что середины отрезков AA' , BB' и CC' лежат на одной прямой.

8. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась точка M такая, что треугольники AMB и CMD — равнобедренные с углом 120° при вершине. Докажите, что найдётся точка N такая, что треугольники BNC и DNA равносторонние.

9. Дан треугольник ABC и движение $f = S_{CA} \circ S_{BC} \circ S_{AB}$. Найдите ГМТ точек X таких, что расстояние от X до $f(X)$ минимально.