Ершово, июль 2016 г.

Задачи к курсу

Многочлены Шуберта, флаги и водопроводные сети

Каждый пункт каждой задачи оценивается в один балл. Для получения оценки "отлично" нужно набрать 8 баллов или больше. Для получения зачёта нужно набрать не менее 4 баллов.

Определение 1. Флаг на плоскости — это пара (a, l), состоящая из точки a и прямой l, содержащей точку a. Два флага (a_1, l_1) и (a_2, l_2) находятся *в общем положении*, если $a_1 \notin l_2$, $a_2 \notin l_1$, и прямые l_1 и l_2 не параллельны.

Задача 1. Даны три флага на плоскости, причём каждые два из них находятся в общем положении друг с другом. Сколько флагов на плоскости находятся НЕ в общем положении с тремя данными флагами, но при этом не параллельны ни одному из них?

Определение 2. Моном от n *формальных* переменных $x_1, \ldots, x_n$ — это произведение $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, где a — вещественное число, $k_1, \ldots, k_n$ — целые неотрицательные числа, а $x_1, \ldots, x_n$ — абстрактные символы, которые мы в этом листке ни при каких обстоятельствах не будем заменять на числа.
Многочлен — это конечная сумма мономов. Обратите внимание, что при таком определении многочлен — НЕ функция, а абстрактное алгебраическое выражение.

Задача 2. (а) Для каждого натурального n найдите многочлен f от двух переменных x_1 и x_2, такой что $(x_1 - x_2)f = x_1^n - x_2^n$.
(б) Для каких натуральных n существует многочлен f от двух переменных x_1 и x_2, такой что $(x_1 + x_2)f = x_1^n + x_2^n$?
(в) Найдите многочлен f, такой что $(x_1 + x_2 + x_3)f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$.

Определение 3. Пусть f — многочлен от n переменных. Для каждого $i = 1, \ldots, n-1$ определим i-тую разделённую разность $\partial_i f$ как многочлен

$$\partial_i f = \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}},$$

где через $s_i f$ обозначается многочлен, полученный из f перестановкой переменных x_i и x_{i+1}.

Задача 3. (а) Докажите корректность определения, то есть проверьте, что $\partial_i f$ всегда является многочленом.
(б) Вычислите $\partial_1\partial_2\partial_3 f$ для $f = x_1^3 x_2^2 x_3$.

Задача 4. (а) Докажите, что $\partial_i^2 = 0$, то есть $\partial_i\partial_i f = 0$ для любого многочлена f.
(б) Докажите, что $\partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1}$.

Определение 4. Многочлены Шуберта от n переменных — это все ненулевые многочлены, которые получаются из монома $x_1^{n-1}x_2^{n-2}\cdots x_{n-2}^2 x_{n-1}$ последовательным применением нескольких разделённых разностей $\partial_1, \ldots, \partial_{n-1}$ (в любой последовательности и в любом количестве).

Задача 5. Найдите число многочленов Шуберта для
(а) $n = 3$; (б) $n = 4$; (в) произвольного натурального n.

Задача 6. Докажите, что коэффициенты многочленов Шуберта всегда неотрицательны для
(а) $n = 3$; (б) $n = 4$.

Рис. 1. Слева направо: перекрёсток (cross), развязка (elbow joint) и полуразвязка.

Определение 5. Водопроводная сеть (pipe dream) — это $n \times n$-таблица, в каждую клетку которой вставляется фрагмент водопроводных труб согласно перечисленным ниже правилам. Под клеткой (i, j) мы понимаем клетку на пересечении i-той строки и j-того столбца.
(1) Если $i + j < n$, то в клетку (i, j) вставляется либо фрагмент “перекрёсток”, либо фрагмент “развязка” (см. рис. 1).
(2) Если $i + j = n$, то в клетку (i, j) вставляется фрагмент “полуразвязка” (см. рис. 1).
(3) Если $i + j > n$, то клетка (i, j) остаётся пустой.
По каждой водопроводной сети D определим перестановку $w(D)$ на множестве $\{1, \dots, n\}$ по правилу: труба, входящая в столбце i, выходит в строке $w(i)$.

Задача 7. (а) Нарисуйте водопроводную сеть с перестановкой

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(б) Докажите, что ответ в пункте (а) единственнен.

Определение 6. Водопроводная сеть называется приведённой, если никакие две трубы не пересекаются более одного раза.

Задача 8. Нарисуйте все приведённые водопроводные сети с перестановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение 7. По каждой водопроводной сети D определим моном $x(D)$ от переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$ таким образом:

$$x(D) = x_1^{\text{число + в 1-ом столбце}} \cdot x_2^{\text{число + во 2-ом столбце}} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{\text{число + в } (n-1)\text{-ом столбце}}.$$

Задача 9. Вычислите мономы $x(D)$ для всех водопроводных сетей D из задач 7 и 8.

Задача 10. Проверьте теорему Кириллова–Фомина для многочлена Шуберта $\mathfrak{S}_\tau = \partial_1\partial_2\partial_3(x_1^3 x_2^2 x_3)$ (здесь $\tau = s_3 s_2 s_1$, где через s_i обозначаются элементарные транспозиции). То есть, проверьте тождество

$$\mathfrak{S}_\tau = \sum_D x(D),$$

где сумма берётся по всем приведённым водопроводным сетям D с перестановкой $w_0\tau$. (Подсказка: Многочлен $\mathfrak{S}_\tau$ и перестановка $w_0\tau$ в этом листке уже встречались.)