Введение в теорию групп, часть 2

Листок 1

Группы: напоминание. Теорема Лагранжа. Прямые суммы

Определение 1. Множество G с операцией $*$ называется *группой*, если выполняются следующие свойства:

1) $\forall x, y, z \in G\ (x * y) * z = x * (y * z)$ (ассоциативность);

2) $\exists e \in G \forall x \in G\ e * x = x * e = x$ (элемент e называется *единицей* группы G);

3) $\forall x \in G \exists y \in G\ x * y = y * x = e$ (элемент y называется *обратным* для x и обозначается через x^{-1}).

Если в группе G дополнительно выполняется свойство *коммутативности*

$$\forall x, y \in G\ x * y = y * x,$$

то G называется *абелевой группой.*

Знак $*$ часто опускается, результат применения операции $*$ к элементам x и y записывается через xy.

Задача 1. В любой группе единица единственна. В группе G для любых элементов $a, b \in G$ решение уравнения

$$ax = b \quad (xa = b)$$

существует и единственно.

Задача 2. Приведите примеры групп из 3, 4, 6 элементов. Приведите пример неабелевой группы из 6 элементов. Существует ли неабелева группа из 4 элементов?

Определение 2. Две группы $(G, *)$ и $(H, \circ)$ называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение $\Phi : G \to H$ такое, что

$$\forall x, y \in G\ \Phi(x * y) = \Phi(x) \circ \Phi(y).$$

Задача 3. Отношение *быть изоморфными группами* является отношением эквивалентности.

Задача 4. Найдите все не изоморфные между собой группы из двух, трех, четырех элементов.

Задача 5. Какие из указанных числовых множеств с операциями являются группами?

а) $(A, +)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$;

б) $(A, \cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$;

в) $(A_0, \cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, а $A_0 = A \setminus \{0\}$;

г) числа $\{0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1\}$ с операцией сложения по модулю n (обозначение: $\mathbb{Z}_n$);

д) числа $\{1, 2, \ldots, n-2, n-1\}$ с операцией умножения по модулю n?

Задача 6. Какие из указанных ниже совокупностей отображений множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себя образуют (относительно композиции) группу

а) множество все отображений;

б) множество всех инъективных (сюръективных, биективных) отображений?

Определение 3. Группа из пункта б) предыдущей задачи называется *группой подстановок порядка* n и обозначается через $\mathbf{S}_n$.

Задача 7. При каких n группа $\mathbf{S}_n$ является абелевой?

Задача 8. Введите естественное понятие *степени* элемента $g \in G$: g^k. Докажите обычные свойства степени: $(g^n)^m = g^{nm}$, $g^n g^m = g^{n+m}$. Будет ли выполняться свойство $g^n h^n = (gh)^n$?

Определение 4. Непустое подмножество H группы G называется *подгруппой*, если

$$\forall x, y \in H \ xy \in H \wedge x^{-1} \in H.$$

Задача 9. Докажите, что конечное непустое подмножество любой группы, замкнутое относительно умножения, является подгруппой. Верно ли это утверждение, если это подмножество бесконечно?

Задача 10. Найдите все подгруппы группы целых чисел $(\mathbb{Z}, +)$; группы подстановок $\mathbf{S}_3$.

Определение 5. Пусть H — подгруппа группы G, $g \in G$. Тогда *правым* (*левым*) *смежным классом элемента* g *по подгруппе* H называется множество

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \quad (Hg = \{hg \mid h \in H\}).$$

Задача 11. Пусть G — группа, H — ее подгруппа, $g_1, g_2 \in G$. Тогда либо $g_1H = g_2H$, либо $g_1H \cap g_2H = \emptyset$.

Задача 12. Пусть g_1, g_2 — элементы группы G и H_1, H_2 — подгруппы в G. Докажите, что следующие свойства эквивалентны:

а) $g_1H_1 \subseteq g_2H_2$; б) $H_1 \subseteq H_2$ и $g_2^{-1}g_1 \in H_2$.

Задача 13. Пусть g_1, g_2 — элементы группы G, H_1, H_2 — подгруппы в G. Докажите, что непустое множество $g_1H_1 \cap g_2H_2$ является в группе G правым смежным классом некоторого элемента по подгруппе $H_1 \cap H_2$.

Задача 14. Докажите, что множество левых смежных классов группы G по подгруппе H равномощно множеству правых смежных классов G по H.

Задача 15. Пусть H — подгруппа группы G, $g_1, g_2 \in G$, $g_1H \subseteq Hg_2$. Верно ли, что тогда $g_1H = Hg_2$?

Задача 16 (теорема Лагранжа). Если G — конечная группа, H — ее подгруппа, то количество правых (левых) смежных классов G по H равно $G : H$ (это количество называется *индексом* подгруппы H в группе G). Как следствие, порядок подгруппы всегда делит порядок группы.

Определение 6. *Порядком* элемента g группы G называется минимальное натуральное число $n > 0$ такое, что $g^n = e$. Если такого числа не существуют, то говорят, что порядок элемента g бесконечен.

Задача 17. В конечной группе порядок любого элемента делит порядок группы.

Задача 18 (малая теорема Ферма). Для любого простого числа p и любого натурального a

$$a^p \equiv a \mod p.$$

Задача 19. Найдите все неизоморфные группы порядка p (p — простое число).

Определение 7. Для групп G_1 и G_2 группа G, состоящая из упорядоченных пар (g_1, g_2), $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, с операцией умножения

$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2),$$

называется *прямой суммой* групп G_1 и G_2: $G = G_1 \oplus G_2$.

Задача 20. Докажите, что группа $\mathbb{Z}_{mn}$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$ тогда и только тогда, когда $(n, m) = 1$.

Задача 21. Можно ли представить группу S_4 в виде прямой суммы двух нетривиальных групп?

Задача 22. Если в группе G для любого $g \in G$ выполняется $g^2 = e$, то G — абелева группа.

Задача 23. Найдите все неизоморфные группы порядка 8.

Задача 24. Приведите пример бесконечной неабелевой группы.

Задача 25. Существует ли бесконечная группа, все элементы которой имеют конечный порядок?

Задача 26. Найдите все конечные группы, в которых существует наибольшая собственная подгруппа.