

Введение в теорию групп

Листок 2

Теорема Лагранжа.

ЗАДАЧА 1. Найдите все подгруппы

- а) группы остатков по модулю 6 по сложению;
- б) группы движений равностороннего треугольника;
- в) группы движений квадрата.

ЗАДАЧА 2. Покажите, что следующие два утверждения о подмножестве H группы G равносильны:

- H — подгруппа группы G ;
- $\forall x, y \in H \quad xy^{-1} \in H$?

ЗАДАЧА 3. Докажите, что конечное непустое подмножество любой группы, замкнутое относительно умножения, является подгруппой. Верно ли это утверждение, если это подмножество бесконечно?

ЗАДАЧА 4. Найдите все неизоморфные группы порядка p (p — простое число).

ЗАДАЧА 5. Найдите все неизоморфные группы порядка 6.

ЗАДАЧА 6. Если в группе G для любого $g \in G$ выполняется $g^2 = e$, то G — абелева группа.

ЗАДАЧА 7 ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА. Пусть функция Эйлера $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним. Тогда, если a и n взаимно просты, то

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$