Школа 57
летний лагерь
"Альбатрос"

июнь-июль 2017

Экспонента

Теорема о существовании и единственности решения дифференциальных уравнений:
Пусть $G(x, y)$ — функция, непрерывная и имеющая непрерывные частные производные $\frac{dG}{dx}$ и $\frac{dG}{dy}$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Тогда при некотором $\epsilon > 0$ на $U_\epsilon(x_0) = (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ существует и единственна функция f, удовлетворяющая на $U_\epsilon(x_0)$ условиям

$$f'(x) = G(x, f(x)), \quad f(x_0) = y_0.$$

Ниже — некоторые примеры ситуаций, когда теорема не работает.

Задача 1°. Решите уравнение $f'(x) = f(x)^2$. Найдите максимальный промежуток, на котором существует решение этого уравнения с начальными условиями $f(x_0) = y_0$. Покажите, что решение уходит на бесконечность за конечное время при $y_0 > 0$.

Задача 2. Покажите, что при любом $a \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = 0$ при $x \leqslant a$, $f(x) = (x-a)^2$ при $x \geqslant a$ является решением уравнения $f'(x) = 2\sqrt{|f(x)|}$. Таким образом, решения этого уравнения с начальным условием $f(0) = 0$ не единственны. Обратите внимание, что функция $G(x, y) = 2\sqrt{|y|}$ при этом непрерывна, но не дифференцируема по y в окрестности точки $(0, 0)$. Найдите все решения этого уравнения, определённые на $\mathbb{R}$.

Задача 3°. Пусть $g(x)$ — решение уравнения $f'(x) = f(x)$ с начальными условиями $f(0) = 1$, определённое и положительное на некоторой окрестности $U_\epsilon(0)$.

a) Покажите, что $g(x + h) = g(x)g(h)$ если $x, h, x + h \in U_\epsilon(0)$.

b) Фиксируем $h \in (0, \epsilon)$ и определим функцию $\widetilde{g}$ равенствами $\widetilde{g}(x) = g(x)$ при $x \in U_\epsilon(0)$, $\widetilde{g}(x) = g(x+h)/g(h)$ при $x \in U_\epsilon(-h)$, $\widetilde{g}(x) = g(x-h)g(h)$ при $x \in U_\epsilon(h)$. Покажите, что функция $\widetilde{g}(x)$ корректно определена и является решением уравнения $f'(x) = f(x)$ с начальными условиями $f(0) = 1$, определённым на $U_{\epsilon+h}(0)$.

c) Покажите, что $g(x)$ продолжается до положительного решения уравнения $f'(x) = f(x)$ с начальными условиями $f(0) = 1$, определённого на всей прямой.

(Конечно, в задаче 3 нельзя пользоваться явным видом функции $g(x)$)

Задача 4. Постройте приближённое решение уравнения $f'(x) = -x/f(x)$ с начальными условиями $f(4) = 4$ в виде кусочно-линейной функции с шагом $h = 1$ (вычислите его значения в точках $4, 5, 6, 7, 8$). Убедитесь в том, что его поведение не похоже на поведение точного решения (его тоже найдите). А что будет происходить при маленьких h?

Пусть $h_a(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — решение дифференциального уравнения $f'(x) = a \cdot f(x)$ с начальным условием $f(0) = 1$, где $a \in \mathbb{C}$ — комплексное число. Рассмотрим множество точек комплексной плоскости вида $h_a(x)$ как параметризованную кривую. При $a \notin \mathbb{R}, a \notin i\mathbb{R}$ такая кривая называется *логарифмической спиралью*. Обозначим её H_a.

Задача 5. Найдите пределы $\lim_{x\to+\infty} h_a(x)$ и $\lim_{x\to-\infty} h_a(x)$.

Задача 6. a) Покажите, что $H_a = H_{at}$ при $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $b°$) Найдите угол пересечения спирали H_a с проходящими через 0 прямыми. $c°$) Нарисуйте логарифмическую спираль.

Задача 7°. Покажите, что точки пересечения спирали H_a с вещественной осью образуют геометрическую прогрессию. Найдите её знаменатель.

Задача 8. Найдите длину первого витка логарифмической спирали H_a. А второго? А всей первой половины спирали?

Задача 9. Что будет, если всё время идти на северо-запад?