Инверсия-III.

Теорема. *Если четыре обобщенные окружности кривизн k_1, k_2, k_3, k_4 попарно касаются друг друга в шести точках, то*

$$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2.$$

Задача 1. $a)$ Завершите доказательство теоремы Декарта.

$b)$ Выведите из формулы Декарта формулу для радиуса окружности касающейся двух данных окружностей ω_1, ω_2 и их общей касательной.

Задача 2 (Окружности Форда)**.** Рассмотрим на координатной плоскости множество окружностей

$$\mathcal{F} = \{\omega_{p/q} \mid p/q \in \mathbb{Q},\ p/q \in [0,1]\},$$

где $\omega_{p/q}$ — окружность с центром $(p/q, 1/2q^2)$ радиуса $1/2q^2$.

$a)$ Докажите, что окружности $\omega_{a/b}$ и $\omega_{c/d}$ либо не пересекаются, либо касаются.

$b)$ Докажите, что окружности $\omega_{a/b}$ и $\omega_{c/d}$ касаются тогда и только тогда, когда $|ad-bc| = 1$.

$c)$ Докажите, что $\mathcal{F}$ является подмножеством фрактала Аполлония, определённого прямой $y = 0$ и окружностями $\omega_{0/1}$ и $\omega_{1/1}$

Для сдачи листка необходимо решить 2 задачи.