Неравенства

Листков будет несколько. Нужно закрыть все листочки, чтобы закрыть курс. Чтобы закрыть этот листок, нужно решить 8 задач из 10.

1. Пусть даны положительные числа a и b. Докажите, что

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}.$$

2. Доказать, что если $a \ge 0$, то имеет место неравенство $a^3+2 \ge a^2+2\sqrt{a}$.

3. Для положительных a,b,c докажите, что $(a+b)(b+c)(a+c) \ge 8abc$.

4. Докажите неравенство $(ab+bc+ac)^2 \ge 3abc(a+b+c)$.

5. Докажите, что для всех $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \ge 6abc.$$

6. Пусть даны неотрицательные a, b и c. Докажите, что

$$6abc \le ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c) \le 2(a^3+b^3+c^3).$$

7. Докажите, что для положительных a,b,c

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{a+c}+\frac{2c}{a+b} \ge 3.$$

8. Положительные a и b таковы, что $a+b=1$. Докажите, что

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \ge \frac{25}{2}.$$

9. (Региональный этап ВОШ 11 класса) Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab+bc+ac=1$. Докажите, что

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \ge 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

10. (Региональный этап ВОШ 11 класса) Положительные a, b, c удовлетворяют условию $abc \ge ab+bc+ac$. Докажите, что

$$\sqrt{abc} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$