

Все задачи этого листка нужно переформулировать на математическом языке перед решением. В некоторых задачах это подразумевает простое введение вероятностного пространства и переформулирование задачи в соответствующих терминах, а в некоторых придется еще и сделать строгой исходную не вполне строгую формулировку.

Задача 1. Симметричную монету подбросили 6 раз. Какая последовательность результатов более вероятна: ОРРОРО или ООРОРО?

Задача 2. Жюри состоит из 3 человек. Первые два принимают верное решение с вероятностью p . Решение принимается большинством голосов. Каковы вероятности принятия жюри верного решения, если третий член жюри:

- а) принимает то же решение, что и первый член жюри; (модель подхалима)
- б) бросает монетку и принимает верное решение с вероятностью $1/2$; (модель скучающего)
- в) принимает верное решение с вероятностью p ; (три эксперта)
- г) принимает решение противоположное принятому первым членом жюри?

Задача 3. (*парадокс Монти Холла*) Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трёх дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас — не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2? Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

Решите в предположении следующих вариантов поведения ведущего:

- а) «Ангельский Монти»: ведущий предлагает сменить, если дверь неправильная.
- б) «Адский Монти»: ведущий предлагает сменить, если дверь правильная.
- в) «Несведущий Монти» или «Монти Бух»: ведущий нечаянно падает, открывается дверь, и оказывается, что за ней не машина. Другими словами, ведущий сам не знает, что за дверями, открывает дверь полностью наугад, и только случайно за ней не оказалось автомобиля.
- г) Классический случай: ведущий всегда предлагает сменить дверь, причем если участник выбрал дверь с машиной, ведущий открывает одну из оставшихся дверей с равной вероятностью.

Задача 4. (*формула Байеса²*) Пусть A_1, \dots, A_n — разбиение вероятностного пространства X . Тогда для произвольного события B с $P(B) > 0$ верно:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j \in \{1, \dots, n\}} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Задача 5. а) У одного человека было два представителя семейства кошачьих. По крайней мере один из них — кот. Какова вероятность того, что они оба коты, а не кошки?

б) У другого человека тоже было два представителя семейства кошачьих — черный и белый. Белый был котом. Какова вероятность того, что они оба коты?

Задача 6. Дана несимметричная монета, которая с вероятностью $2/3$ приземляется одной стороной и с вероятностью $1/3$ — другой. Один человек бросив монету 5 раз, выкинул 4 орла и 1 решку. Другой человек бросил монету 20 раз и насчитал 12 орлов и 8 решек. Кто из двух участников будет более уверен, что вероятность решки — $\frac{2}{3}$, а не наоборот?

¹Задачи, помеченные † являются дополнительными, а помеченные * еще и более трудными.

²Томас Байес (Thomas Bayes) (1702 – 7 апреля 1761) — английский математик, пресвитерианский священник, член Лондонского королевского общества (1742). Сама формула опубликована посмертно в 1763.

Задача 7. Дома у Абдула-ювелира было три комода; в каждом комодe по два ящичка. В каждом ящичке одного комода лежало по рубину. В каждом ящичке другого комода лежало по изумруду, а в третьем комодe в одном ящичке лежал рубин, а во втором изумруд. Предположим, вы наугад выбираете любой из трех комодов, выдвигаете один из ящичков и находите рубин. Какова вероятность того, что во втором ящичке этого комода тоже рубин?

Задача 8[†]. (*Парадокс Юла—Симпсона*) Доля отличников среди девочек 11Д класса выше, чем среди мальчиков. Доля отличников среди девочек 11М класса выше, чем среди мальчиков. 11Д и 11М классы собрались вместе. Может ли доля отличников среди собравшихся мальчиков быть выше доли отличников среди собравшихся девочек?

Задача 9[†]. Когда ученый с мировым именем Иннокентий не знает, какой ему взять пирожок, с яблоком или с малиной он бросает монетку. **а)** Вчера в столовой появились пирожки с вишней и клубникой. Как он мог выбрать случайный пирожок? **б*)** Сегодня пирожки с клубникой закончились. Как ему теперь выбрать случайный пирожок с помощью монетки?

Задача 10*. У короля Артура два одинаково мудрых советника – Мерлин и Персифаль. Каждый из них находит верный ответ на любой вопрос с вероятностью p или неверный ответ с вероятностью $q = 1 - p$. Если оба советника говорят одно и то же, король слушается их. Если они говорят противоположное, то король выбирает решение, подбрасывая монету. Однажды Артур задумался – зачем ему два советника, не хватит ли одного? Тогда король позвал советников и сказал:

– Мне кажется, что вероятность принятия верных решений не уменьшится, если оставлю одного советника и буду его слушаться. Если это так, я должен уволить одного из вас. Если это не так, я оставлю все, как есть. Ответьте мне, должен ли я уволить одного из вас?

– Кого именно ты собираешься уволить, король Артур? – спросили советники.

– Если я приму решение уволить одного из вас, то сделаю выбор с помощью жребия, бросив монету.

Советники ушли думать над ответом. Советники, повторим, одинаково мудрые, но не одинаково честные. Персифаль очень честен и постарается дать верный ответ, даже если ему грозит увольнение. А Мерлин, честный во всем прочем, в этой ситуации решает дать такой ответ, чтобы вероятность его увольнения была как можно меньше. Какова вероятность того, что Мерлин будет уволен?

Задача 11[†]. (*задача трех узников*) Трое заключённых, А, В и С заключены в одиночные камеры и приговорены к смертной казни. Губернатор случайным образом выбирает одного из них и милует его. Стражник, охраняющий заключённых, знает, кто помилован, но не имеет права сказать этого. Заключённый А просит стражника сказать ему имя того (другого) заключённого, кто точно будет казнён: «Если В помилован, скажи мне, что казнён будет С. Если помилован С, скажи мне, что казнён будет В. Если они оба будут казнены, а помилован я, подбрось монету, и скажи имя В или С». Стражник говорит заключённому А, что заключённый В будет казнён. Заключённый А рад это слышать, поскольку он считает, что теперь вероятность его выживания стала $1/2$, а не $1/3$, как была до этого. Заключённый А тайно говорит заключённому С, что В будет казнён. Заключённый С также рад это слышать, поскольку он всё ещё полагает, что вероятность выживания заключённого А — $1/3$, а его вероятность выживания возросла до $2/3$. Кто из заключённых прав?

Задача 12[†]. В урну, где находился один белый шар, добавили либо белый, либо черный шар (с одинаковыми вероятностями). После этого случайным образом вытащили один шар. Он оказался белым. Какова условная вероятность того, что оставшийся в урне шар тоже белый?