Летний лагерь
57 школы

Схема испытаний Бернулли

26 июня 2018

Задача 1. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений было бы равно 10?

Задача 2. В среднем в летней школе только 20% школьников сдают все задачи из типового листка с задачами. Найти вероятность того, что из 9 школьников:

а) пять не закроют листок;

б) менее двух закроют листок;

в) не более двух закроют листок;

г) хотя бы два закроют листок.

д) Найдите наивероятнейшее число сдавших листок школьников.

Задача 3. Самостоятельно проверить, что число наивероятнейших исходов в схеме испытаний Бернулли удовлетворяет неравенству $np - q <= m_0 <= np + p$. Что можно сказать о количестве наивероятнейших чисел (одно, два, много)?

Задача 4. Самостоятельно доказать формулу Пуассона: если вероятность $p \to 0$ при $n \to 0$ так, что $np \to \lambda$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{m,n} = P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$.

Задача 5. В школе учатся 1825 учеников. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рожденья одновременно четырех учеников?

Задача 6. Школьник Вася сдал в летнем лагере десять тысяч задач. Он знает про себя, что среднее количество (за все предыдущие годы, а не в этот раз) неправильных решений, которые удается сдать — 0.02%. Найдите вероятность того, что Васе удалось "пропихнуть" в этот раз:

а) ровно 3 неверных решения;

б) по крайней мере 3 неверных решения;

в) 9997 неверных решений;

г) хотя бы 9997 неверных решений.

Задача 7. По результатам проверок туристической службы Болгарии установлено, что в среднем каждый второй отель иногда не подает на ужин мясо. Найти вероятность того, что из 1000 отелей Болгарии иногда не подают мясо на ужин:

а) 480 отелей;

б) наивероятнейшее число не подающих иногда мясо отелей;

в) не менее 400 отелей;

г) от 480 до 520 отелей.

Указание: $f(1.265) \approx 0.1792$, $f(0) \approx 0.3989$, $F(31.6) \approx 0$, $F(1.265) \approx 0.7941$

Задача 8. В страховой компании 10 тысяч клиентов. Страховой взнос каждого клиента составляет 500 рублей. При наступлении страхового случая, вероятность которого по текущим оценкам экспертов равна $p = 0.005$, страховая компания обязана выплатить клиенту страховую сумму размером 50 тыс. рублей. На какую прибыль может рассчитывать компания с вероятностью 95%?

Указание: $F(1.645) = 0.9$

Летний лагерь
57 школы

26 июня 2018

Факты из лекции

Теорема. Если вероятность $p \to 0$ при $n \to 0$ так, что $np \to \lambda$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{m,n} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$.

Локальная теорема Муавра-Лапласа.

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то и вероятность того, что A произойдет в m из n испытаний при достаточно большом n приближенно равна:

$$P_{m,n} \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}} \tag{1}$$

где $f(x)$ — функция Гаусса

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2}$$

и

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \tag{3}$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число m наступления события A в n независимых испытаниях заключена в пределах от a до b (включительно) при достаточно большом n равна:

$$P_n(a <= m <= b) \approx \frac{1}{2}[F(x_2) - F(x_1)] \tag{4}$$

где

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{5}$$

- функция (или интеграл непрерывностей) Лапласа

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} \tag{6}$$