

Первые вопросы про коды и немного линейной алгебры

Для успешной сдачи этого листка необходимо решить одиннадцать задач.

1. Рассмотрим код в \mathbb{F}_2^7 , состоящий из нулевого вектора и семи векторов следующего вида: вектор $(1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$ и все его циклические сдвиги. Найдите все векторы веса 3, ближайший элемент кода для которых определён не однозначно. Каково максимальное число ближайших соседей у вектора?

2. Докажите следующую оценку Синглтона: для $[n, k, d]_q$ -кода выполнено неравенство $k \leq n - d + 1$. Указание: проведите индукцию по длине кода n .

3. Рассмотрим код в \mathbb{F}_2^n , состоящий из всех векторов, в которых количество единиц чётно. Вычислите размерность и минимальное расстояние для этого кода. Является ли он линейным?

4. Покажите, что повторяющийся двоичный код совершенен тогда и только тогда, когда его скорость равна $\frac{1}{2k+1}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

5. Докажите, что, если существуют коды $[7, 4, 3]_2$ и $[4, 2, 3]_3$, то они совершенны.

6. Пусть мы хотим построить коды с очень большим количеством кодовых слов и выбираем размер алфавита. Мы знаем, что энергозатраты на передачу одного символа пропорциональны размеру алфавита. Как его выбрать, чтобы их минимизировать? Указания: продифференцируйте функцию $f = \frac{x}{\ln(x)}$; не думайте про скорость кода.

7. Сколько существует линейных $[n, k, \star]_q$ -кодов?

8. Сколько существует линейных $[n, k, 1]_q$ -кодов?

9. Рассмотрим векторное пространство многочленов от одной переменной степени не выше n над полем \mathbb{R} и на нём оператор дифференцирования. Найдите ранг этого оператора и выпишите его матрицу в удобном базисе.

10. Сделайте то же для оператора, переводящего многочлен $f(x)$ в многочлен $f(x+1) - f(x)$.

11. Приведите к стандартному виду и распознайте код, заданный матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

12. Приведите к стандартному виду и распознайте код, заданный матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Что пошло не так, и как это исправить?

13. Напишите какую-нибудь матрицу кода в \mathbb{F}_{11}^{10} , заданного ISBN-чексуммой:

$$\sum_{i=1}^{10} ix_i = 0.$$

Почему это линейный код?) Проверьте, что он обнаруживает любую одну ошибку, а также перестановку соседних символов.

14. Приведите матрицу ISBN-кода к стандартному виду.