Понятие множества в анализе, подобно понятию *прямой* в геометрии, определяется не конструктивно, а «как объект, удовлетворяющий аксиомам» (этот список аксиом теории множеств мы пока не будем уточнять). Множество целиком определяется элементами, из которых оно состоит. Если элемент a принадлежит множеству A, пишут $a \in A$. Множество иногда записывают, перечисляя в фигурных скобках через запятую его элементы, например, $\{2, 5\}$ — множество, состоящее из элементов 2 и 5. Для многих множеств есть стандартные обозначения, например, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел (числовая прямая). Множество можно задавать каким-нибудь свойством, которому должны удовлетворять его элементы, например, $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ делится на } 2\}$ — множество чётных чисел. Количество элементов в множестве A обычно обозначается как $|A|$ или $\#A$.

Определение 1. Множества A и B называются *равными,* если они состоят из одних и тех же элементов. Обозначение: $A = B$. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A содержится в множестве B. Обозначение: $A \subseteq B$. Существует обозначение $A \subsetneq B$ — является подмножеством, но не совпадает. Часто пишут просто «$A \subset B$» имея в виду «$A \subseteq B$».

Задача 1. Для каждых двух из следующих множеств укажите, является ли одно из них подмножеством другого: $\{1, 2\}$, $\{\{1, 2\}, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$, $\{\{2, 1\}\}$.

Задача 2. Докажите для произвольных множеств A, B, C: **а)** $A \subseteq A$; **б)** если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$; **в)** $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Определение 2. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым.* Обозначение: $\varnothing$.

Задача 3. Совпадают ли множество целых чисел, которые делятся и на 5 и на 7, но не делятся на 35, и множество прямоугольных треугольников с длиной гипотенузы 6 см и площадью 10 см^2?

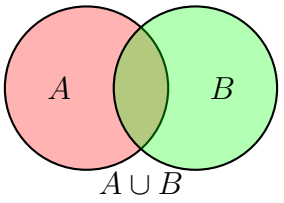
Задача 4. Сколько всего различных подмножеств в множестве из n элементов?

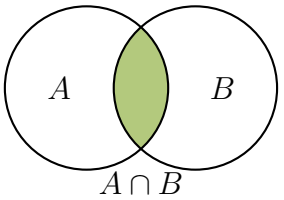
Определение 3. *Объединением* множеств A и B называют множество, состоящее из всех таких x, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (т. е. $x \in A$ или $x \in B$). Обозначение: $A \cup B$.

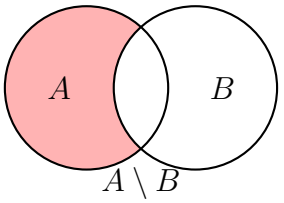
Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех таких x, что $x \in A$ и $x \in B$. Обозначение: $A \cap B$.

Разностью множеств A и B называют множество, состоящее из всех таких x, что $x \in A$ и $x \notin B$. Обозначение: $A \setminus B$.

Изображать объединение, пересечение и разность удобно с помощью *кругов Эйлера* (см. рис.)







Задача 5. Верно ли, что **а)** $A \cup B = B \cup A$; **б)** $A \cap B = B \cap A$; **в)** $A \setminus B = B \setminus A$?

Задача 6. Пусть A — множество всех нечётных чисел, B — множество всех чисел, делящихся на 3 ($A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$). Найдите $A \cap B$ и $B \setminus A$.

Задача 7. Верно ли, что для любых множеств A, B и C

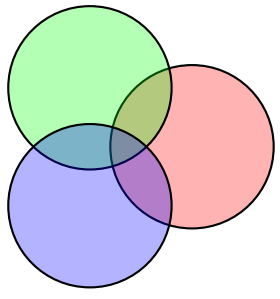
а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; **б)** $A \cap B = A$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$;

в) $A \setminus B = C$ тогда и только тогда, когда $A = B \cup C$?

Задача 8. Докажите тождества для любых множеств A, B и C:

а) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; **б)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Задача 9. **а)** В НИИ работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий, и 23 — оба языка. Сколько человек в НИИ не знают ни английского, ни немецкого языков? **б)** Пусть кроме этого польский знают 20 человек, английский и польский — 12, немецкий и польский — 11, все три языка — 5. Сколько человек не знают ни одного из этих языков? **в)** (*Формула включений и исключений*) Решите задачу в общем случае: имеется m языков L_1, $L_2, \ldots, L_m$, и для каждого набора языков L_{i_1}, $L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$ известно, что ровно $N_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ человек знают все языки из этого набора.



Определение 4. *Декартовым произведением* множеств A и B называется множество всевозможных упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Обозначение: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. *Множество всех подмножеств* множества A обозначается 2^A.

Задача 10. Пусть $\#A = m$, $\#B = n$. Найдите: **а)** $\#(A \times B)$; **б)** $\#2^A$.

Задача 11. Верно ли что **а)** $2^{A \times B} = 2^A \times 2^B$; **б)** $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$?

1	2 а	2 б	2 в	3	4	5 а	5 б	5 в	6	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	9 а	9 б	9 в	10 а	10 б	11 а	11 б