**Определение 1.** Последовательность $(x_n)$ называется *ограниченной сверху*, если найдётся такое число $C$, что при всех натуральных $n$ будет выполнено неравенство $x_n < C$.
Формально: $\exists\, C \in \mathbb{R}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ x_n < C$.
Аналогично определяется последовательность, *ограниченная снизу.*
Если последовательность ограничена и сверху и снизу, говорят, что она *ограничена.*

**Определение 2.** Последовательность $(x_n)$ называется *возрастающей*, если при всех натуральных $n$ выполнено неравенство $x_n < x_{n+1}$.
Формально: $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n < x_{n+1}$.
Аналогично определяются *убывающая, невозрастающая, неубывающая* последовательности.

**Определение 3.** Последовательность называется *монотонной*, если она является либо возрастающей, либо убывающей, либо невозрастающей, либо неубывающей.

**Определение 4.** Последовательность $(y_k)$ называется *подпоследовательностью* последовательности $(x_n)$, если существует возрастающая последовательность натуральных чисел $(n_k)$ такая, что $y_k = x_{n_k}$.

**Определение 5.** *Суммой* последовательностей $(x_n)$ и $(y_n)$ называется последовательность $(z_n)$, задаваемая соотношением $z_n = x_n + y_n$ при каждом натуральном $n$. Аналогично определяются *разность*, *произведение* и *отношение* двух последовательностей.

**Определение 6.** Последовательность $(x_n)$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа $\varepsilon$ при $n \gg 0$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.
Формально: $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n > k\ \ |x_n| < \varepsilon$.

**Утверждение 1.** Бесконечно малая последовательность является ограниченной.

**Утверждение 2.** Сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми последовательностями.

---

**Задача 1.** **а)** Придумайте две различные последовательности, являющиеся подпоследовательностями друг друга. **б)*** Придумайте такую последовательность натуральных чисел, чтобы каждая последовательность натуральных чисел являлась её подпоследовательностью.

**Задача 2*.** Докажите, что у любой последовательности найдётся монотонная подпоследовательность.

**Задача 3.** Есть ли последовательность, члены которой найдутся в любом интервале числовой оси?

**Задача 4.** Докажите, что следующие последовательности являются бесконечно малыми (то есть для каждой последовательности $(x_n)$ по заданному положительному числу $\varepsilon$ найдите какой-нибудь номер $k$, начиная с которого выполнено неравенство $|x_n| < \varepsilon$):
**а)** $x_n = \dfrac{1}{n}$; **б)** $x_n = \dfrac{14}{n^3}$; **в)** $x_n = \dfrac{1}{2n^2+3n-1}$; **г)** $x_n = \dfrac{\sin n^\circ}{n^2}$.

**Задача 5°.** Пусть $(x_n)$ — бесконечно малая, а $(y_n)$ — ограниченная последовательность. Докажите, что $(x_n + y_n)$ — ограниченная, а $(x_n y_n)$ — бесконечно малая последовательность.

**Задача 6*.** Любую ли последовательность можно представить как отношение
**а)** двух ограниченных; **б)** двух бесконечно малых последовательностей?

**Задача 7.** Дана последовательность $(x_n)$ с положительными членами. Верно ли, что $(x_n)$ бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $(\sqrt{x}_n)$ бесконечно малая?

**Задача 8.** В бесконечно малой последовательности $(x_n)$ переставили члены (то есть взяли взаимно однозначное соответствие $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и получили новую последовательность $(y_n)$, где $y_n = x_{f(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$). Обязательно ли полученная последовательность будет бесконечно малой?

**Задача 9.** Последовательность состоит из положительных членов, причём сумма любого количества любых её членов не превосходит 1. Докажите, что эта последовательность бесконечно малая.

| 1 а | 1 б | 2 | 3 | 4 а | 4 б | 4 в | 4 г | 5 | 6 а | 6 б | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | |