Листок №20 **Производная** 03.2014

Определение 1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция f называется *дифференцируемой в точке* x_0, если существует предел
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
(называемый *производной функции* f *в точке* x_0). Обозначения: $f'(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Задача 1. Докажите, что если функция f дифференцируема в точке x_0, то
$$f'(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}.$$

Определение 2. Функция f называется *дифференцируемой на множестве* M, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. В этом случае функция $g\colon M\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)$ называется *производной функции* f *на множестве* M. Обозначения: f', $\dfrac{df}{dx}$.

Задача 2°. Найдите производные следующих функций:

а) c **б)** x **в)** x^2 **г)** $1/x$ **д)** $\sqrt{x}$ **е)** $\sin x$ **ж)** $\cos x$ **з)** e^x **и)** $\ln x$.

Задача 3. Приведите пример функции, определённой на множестве $\mathbb{R}$, которая дифференцируема ровно в одной точке.

Задача 4°. Пусть функции f и g дифференцируемы на множестве M. Докажите, что:

а) $(cf)'=cf'\quad(c\in\mathbb{R})$; **б)** $(f\pm g)'=f'\pm g'$; **в)** (*Правило Лейбница*) $(fg)'=f'g+fg'$;

г) если $g(x_0)\neq 0$, то $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Задача 5. Найдите производные следующих функций:

а) $x^m\quad(m\in\mathbb{Z})$; **б)** $|x-3|$; **в)** $x^2+\dfrac{1}{x^3}$; **г)** $\operatorname{tg}x$; **д)** $\operatorname{ctg}x$.

Задача 6°. Докажите, что $f'(x_0)=A$ тогда и только тогда, когда для некоторой функции $o(t)$ *приращение* $f(x_0+t)-f(x_0)$ представимо в виде $At+o(t)$, причём $\lim\limits_{t\to 0}o(t)/t=0$.

Задача 7°. (*Производная сложной функции*) Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$. Докажите, что композиция $h=g\circ f$ функций f и g дифференцируема в точке x_0, причём $h'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$.

1	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	2 е	2 ж	2 з	2 и	3	4 а	4 б	4 в	4 г	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	6	7

Задача 8. Найдите производные следующих функций:

а) $2x^3 + 5x^2 - 3x + 4$; **б)** $\dfrac{x^2 + 8x - 15}{x + 2}$; **в)** $(2x^2 - 5x + 3)^{100}$; **г)** $\sqrt{1 - x^2}$; **д)** $\dfrac{(3x+1)^2}{(2x-5)^3}$;

е) $\sin(\cos e^x)$; **ж)*** $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$ **з)*** $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$

Задача 9°. Пусть функция f определена и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, причём существует $f'(x_0) \neq 0$. Докажите, что обратная к f функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Задача 10*. Найдите и исправьте ошибку в предыдущей задаче.

Задача 11. Найдите производные следующих функций:

а) $x^a \quad (a \in \mathbb{R})$; **б)** $a^x \quad (a > 0)$; **в)** $\log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;

г) $\arcsin x$; **д)** $\arccos x$; **е)** $\operatorname{arctg} x$; **ж)** $\operatorname{arcctg} x$.

Определение 3. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Прямая L называется *касательной к графику функции в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varrho(x)}{x - x_0} = 0$, где $\varrho(x)$ — расстояние от точки $(x, f(x))$ до прямой L.

Задача 12. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Докажите, что касательная к графику функции f в точке x_0 существует и её уравнение имеет вид: $y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Задача 13. Докажите, что в случае окружности определение 3 эквивалентно определению касательной, известному из геометрии.

Задача 14°. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$. Докажите, что существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из левой полуокрестности $f(x) < f(x_0)$, а для всех x из правой полуокрестности $f(x) > f(x_0)$.

Задача 15°. (*Теорема Ферма*) Пусть функция f определена на интервале (a, b) и в точке x_0 принимает наибольшее или наименьшее значение на (a, b). Докажите, что если производная $f'(x_0)$ существует, то она равна нулю. Верно ли обратное?

Задача 16. **а)** Дайте определения левой и правой производных функции f в точке x_0. Обозначение: $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$

б) При каких a и b функция $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant x_0 \\ ax + b, \text{ если } x > x_0 \end{cases}$ дифференцируема на $\mathbb{R}$?

8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	8 е	8 ж	8 з	9	10	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	11 е	11 ж	12	13	14	15	16 а	16 б