

Определение 1. Орбитой элемента $x \in X$ при действии группы преобразований G называется множество $\{g(x) \mid g \in G\} \subset X$. **Обозначение** Gx .

Задача 1. Найдите орбиту каждой точки при действии группы движений

а) квадрата; б) куба; в) правильного m -угольника.

Задача 2. а) Опишите группу движений единичного круга; б) Найдите орбиту каждой точки при действии этой группы; в) Найдите преобразование, не имеющее конечного порядка.

Задача 3. Докажите, что любые две орбиты либо совпадают, либо не пересекаются. Следует ли отсюда, что всё множество X есть объединение непересекающихся орбит?

Задача 4. Докажите, что для любых двух элементов одной орбиты $a, b \in Gx$ найдётся элемент $g \in G$, такой что $g(a) = b$.

Определение 2. Стабилизатором элемента $x \in X$ при действии группы преобразований G называется множество $\{g \mid g(x) = x\} \subset G$. **Обозначение:** G_x .

Задача 5. Найдите стабилизаторы каждой из точек следующих множеств при действии их групп движений: а) квадрата; б) куба; в) правильного m -угольника.

Задача 6. Рассмотрим группу движений куба G . Эта группа также является группой преобразований следующих множеств: а) множества вершин куба; б) множества диагоналей куба; в) множества граней куба; г)* множества пар вершин куба. Опишите орбиты и стабилизаторы во всех случаях.

Задача 7. Пусть задана группа преобразований G множества X . Докажите, что стабилизатор любого элемента $x \in X$ также является группой преобразований множества X .

Задача 8. Пусть группа G конечна. Докажите, что для любых двух элементов одной орбиты $a, b \in Gx$ выполнено $|G_a| = |G_b|$.

Задача 9. Пусть группа G конечна. Докажите, что для любого $x \in X$ верно $|G| = |Gx| \cdot |G_x|$.

Задача 10. Пусть p — простое число. Рассмотрим множество \mathbb{Z}_p остатков по модулю p , ненулевой остаток a и группу G , действующую на \mathbb{Z}_p домножениями на a^k (т.е. $G = \{g_0, g_1, g_2, \dots\}$ и $g_k(x) = x \cdot a^k$).

а) Найдите орбиты действия этой группы;

б) (малая теорема Ферма) Докажите, что $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Определение 3. Функция, равная количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним, называется функцией Эйлера и обозначается через $\varphi(n)$.

Задача 11. (теорема Эйлера) Докажите, что если числа a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Задача 12. Образует ли группу множество преобразований плоскости, переводящих прямые в прямые?

Задача 13. а) Пусть G — группа преобразований множества X , и $h \in G$. Докажите, что отображение $\text{ad}_h: G \rightarrow G, g \mapsto (h \circ g \circ h^{-1})$ является преобразованием G (такое преобразование называется сопряжением); б) Обозначим через $\tilde{G} = \{\text{ad}_h \mid h \in G\}$ множество всех сопряжений группы G . Докажите, что \tilde{G} образует группу;

Задача 14.** (кубик Рубика) Опишите геометрию кубика Рубика¹:

а) Придумайте, как описать группу преобразований кубика Рубика;

б) Сколько различных состояний у кубика Рубика (чему равна $\#X$)?

в) Сколько состояний в орбите собранного кубика Рубика?

г) Сколько из этих состояний различимы у реального кубика?

1	1	1	2	2	2	3	4	5	5	5	6	6	6	6	7	8	9	10	10	11	12	13	13	14	14	14	14
а	б	в	а	б	в			а	б	в	а	б	в	г				а	б			а	б	а	б	в	г

¹У кубика Рубика 2125922464947725402112000 $\approx 2.126 \cdot 10^{24}$ различных состояний. Известно, что если кубик можно собрать, то это можно сделать за 20 ходов. Примечательно, что ещё в 2009 году в этом листке вместо 20 стояло число 22.