**Задача 1.** Докажите, что если уравнение $x^2 - my^2 = 1$ имеет нетривиальное (т.е., отличное от решения $x = 1$, $y = 0$) решение в целых числах, то $m$ не есть полный квадрат.

**Задача 2.** **а)** Покажите, что преобразование $(x, y) \mapsto T(x, y) = (3x + 2y, 4x + 3y)$ переводит всякую гиперболу семейства $x^2 - my^2 = c$ в себя и всякое целочисленное решение уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ в другое целочисленное решение.

**б)** Покажите, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

**в)** Докажите, что всякое положительное целочисленное решение уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ может быть получено из тривиального решения $(1, 0)$ посредством многократного применения преобразования $T$.

**г)*** Приведите общую формулу решений уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$.

**Задача 3.** **а)** Докажите, что вещественные числа вида $a + b\sqrt{m}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ замкнуты относительно операций сложения, вычитания и умножения. Это множество обозначается $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ и называется кольцом целых гауссовых чисел.

**б)** Докажите, что вещественные числа вида $a + b\sqrt{m}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ замкнуты относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления при $a \neq 0$. Это множество называется полем квадратичного расширения $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$.

**в)** Каждому гауссову числу $z = a + b\sqrt{m}$ сопоставим сопряженное гауссово число $\bar{z} = a - b\sqrt{m}$. Назовем нормой $N(z)$ гауссова числа $z$ целое число $z\bar{z} = a^2 - mb^2$. Докажите мультипликативность нормы: $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

**г)** Пусть $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{m}$ и $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{m}$ - два целых гауссовых числа, причем модуль нормы $z_2$ равен $n$. Тогда, если $a_1 = a_2 \mod n$ и $b_1 = b_2 \mod n$, то $z_1$ делится на $z_2$ в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.

**Задача 4.** **а)** Решения уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с целыми гауссовыми числами из $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ с нормой, равной единице. Объясните это.

**б)** Докажите, что на множестве решений уравнения Пелля определена операция умножения, а роль единицы играет тривиальное решение $(1, 0)$.

**в)** Переформулируйте результаты задачи 2 в терминах гауссовых чисел.

**г)** Назовем фундаментальным решением уравнения Пелля положительное решение с минимальной нормой соответствующего гауссова числа (если таковое существует). Покажите, что положительные решения уравнения исчерпываются степенями фундаментального.

**д)** Покажите, что для доказательства существования нетривиального решения уравнения Пелля достаточно показать, что существует гипербола $x^2 - my^2 = c$, содержащая бесконечно много целых точек.

**Задача 5.** **а)** Докажите, что если множество $M$ на плоскости имеет площадь, большую 1, то найдутся две точки $A, B \in M$ такие, что вектор $\overrightarrow{AB}$ целочисленный.

**б)** (лемма Минковского) Докажите, что всякое центрально-симметричное множество площади больше 4 содержит целочисленную точку, отличную от начала координат.

**в)** Пусть $m$ не есть полный квадрат. Выведите из задач 4д и 5б существование нетривиального решения у любого уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$.

**Задача 6.** Пусть пара $(x, y)$ - положительное решение уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$. Тогда $\left|\frac{x}{y} - \sqrt{m}\right| < \frac{1}{2y^2}$.

Таким образом, рациональное число $x/y$ хорошо приближает $\sqrt{m}$ и потому является подходящей дробью для $\sqrt{m}$. Более точно, это следует из такого свойства приближений: если несократимая дробь $p/q$ такова, что $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{2q^2}$, то она является подходящей дробью для иррационального числа $\alpha$. Однако, не всякая подходящая дробь для $\sqrt{m}$ определяет решение соответствующего уравнения Пелля. Попробуйте разобраться с этим на примерах уравнений Пелля с $m = 2$ и $m = 3$.

**Задача 7*.** Докажите, что все целые неотрицательные решения уравнения $x^2 - mxy + y^2 = 1$ описываются как соседние члены рекуррентной последовательности $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1$, $\varphi_{k+1} = m\varphi_k - \varphi_{k-1}$.

| 1 | 2 а | 2 б | 2 в | 2 г | 3 а | 3 б | 3 в | 3 г | 4 а | 4 б | 4 в | 4 г | 4 д | 5 а | 5 б | 5 в | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

<?xml version=’1.0’?>
<listok number = ’NT2’ description=’Уравнение Пелля’ type=’1’ date=’03.2015’>
<problem group=’1’ type=’0’>1</problem>
<problem group=’2’ type=’0’>2а</problem>
<problem group=’2’ type=’0’>2б</problem>
<problem group=’2’ type=’0’>2в</problem>
<problem group=’2’ type=’1’>2г</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3а</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3б</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3в</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3г</problem>
<problem group=’4’ type=’0’>4а</problem>
<problem group=’4’ type=’0’>4б</problem>
<problem group=’4’ type=’0’>4в</problem>
<problem group=’4’ type=’0’>4г</problem>
<problem group=’4’ type=’0’>4д</problem>
<problem group=’5’ type=’0’>5а</problem>
<problem group=’5’ type=’0’>5б</problem>
<problem group=’5’ type=’0’>5в</problem>
<problem group=’6’ type=’0’>6</problem>
<problem group=’7’ type=’1’>7</problem>
</listok>