Задача 1°. (*Теорема Вейерштрасса*) Докажите, что любая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Задача 2. Докажите, что последовательность (x_n) сходится, и найдите её предел, если

а) $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$;

б) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\ldots$;

в) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\ldots$;

г) $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

Задача 3. Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right)$.

Задача 4°. (*Число e*) Докажите, что:

а) последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ сходится (её предел обозначают буквой e);

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = e^k \quad (k \in \mathbb{N})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$;

г)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right) = e$.

Определение 1. Число a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое натуральное $n > k$, что выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.
Формально: $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n > k\colon |x_n - a| < \varepsilon$.

Определение 2. Точка a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если любая окрестность точки a содержит бесконечно много точек последовательности (x_n).

Задача 5. Докажите эквивалентность определений 1 и 2.

Задача 6. **а)** Докажите, что если последовательность имеет предел, то этот предел является предельной точкой и других предельных точек нет.
б) Верно ли, что если последовательность имеет единственную предельную точку, то она (последовательность) является сходящейся?

Задача 7. Для следующих последовательностей укажите все их предельные точки:
а) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$; **б)** $x_n = (-1)^n$; **в)** $x_n = n$; **г)** $x_n = n^{(-1)^n}$.

1	2 а	2 б	2 в	2 г	3	4 а	4 б	4 в	4 г	5	6 а	6 б	7 а	7 б	7 в	7 г

Задача 8. Существует ли последовательность, множество предельных точек которой есть
а) $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$; **б)** $\mathbb{N}$; **в)** $[0, 1]$; **г)**° $(0, 1)$; **д)** $\mathbb{Q}$; **е)** $\mathbb{R}$?

Задача 9. Докажите, что
а) если a является предельной точкой последовательности, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к a;
б) всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку;
в)° (*Теорема Больцано-Вейерштрасса*) из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Определение 3. Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых натуральных m и n, больших k, выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.
Формально: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n > k\colon |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Задача 10°. (*Критерий Коши*) **а)** Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной; **б)** Докажите, что фундаментальная последовательность имеет предел.

Задача 11. (*Признак Лейбница сходимости рядов*) Дана бесконечно малая монотонная последовательность (x_n). Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k x_k$.

Задача 12. Последовательность (x_n) строится по следующему закону: первый член выбирается произвольно, а каждый следующий вычисляется по формуле $x_{n+1} = ax_n + 1$. При каких a последовательность (x_n) имеет предел?

Задача 13. Про последовательность (x_n) известно, что для любого n верно $|x_n - x_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Докажите, что она сходится.

Задача 14. Последовательность (x_n) такова, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |x_n|$ (ряд *сходится абсолютно*). Докажите, что тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$.

Задача 15°. Докажите, что в упорядоченном поле F полнота эквивалентна
а) теореме Больцано-Вейерштрасса;
б) теореме Вейерштрасса.

8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	8 е	9 а	9 б	9 в	10 а	10 б	11	12	13	14	15 а	15 б