Определение 1. Всякий конечный набор точек $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, удовлетворяющий условию $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, называется *разбиением отрезка* $[a, b]$. Разность $x_i - x_{i-1}$ обозначается через Δx_i.

Определение 2. Пусть σ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, а f — функция, ограниченная на этом отрезке. Положим $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Числа $s_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ и $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ называются соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу* функции f при разбиении σ.

Задача 1. Объясните геометрический смысл верхней и нижней сумм Дарбу и «нарисуйте» их для функций: **а)** $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{4} \mid i = 0, \ldots, 4\}$;
б) $f(x) = (x-1)^2$ на отрезке $[0, 2]$ при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{4} \mid i = 0, \ldots, 8\}$.

Задача 2. Можно ли исключить из определения 2 условие ограниченности функции f на отрезке $[a, b]$?

Задача 3. Найдите нижние и верхние суммы Дарбу при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{n} \mid i = 0, \ldots, n\}$ отрезка $[0, 1]$ для функций **а)** $f(x) = x$; **б)** $f(x) = x^2$; **в)** $f(x) = \sin(\pi n x)$.

Задача 4. Что происходит с суммами Дарбу при добавлении к разбиению новых точек?

Задача 5. Докажите, что любая верхняя сумма Дарбу ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f не меньше любой нижней суммы Дарбу этой же функции.

Задача 6. Докажите, что для всякой ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f существуют $I_* = \sup s_\sigma$ и $I^* = \inf S_\sigma$, где супремум и инфимум берутся по всем разбиениям σ отрезка. Сравните I_* и I^*. Эти числа называются *нижним и верхним интегралами Дарбу* функции f на отрезке $[a, b]$.

Задача 7. Найдите I_* и I^* для
а) $f(x) = x$ на $[0, 1]$; **б)** $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$; **в)** функции Дирихле на отрезке $[a, b]$.

Определение 3. Функция f называется *интегрируемой (по Риману)* на отрезке $[a, b]$, если она ограничена на этом отрезке, и $I_* = I^*$. Обозначение: $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Число $I_* = I^*$ называется *определённым интегралом (Римана)* функции f на отрезке $[a, b]$. Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Задача 8. Верно ли, что всякая ограниченная на отрезке функция интегрируема на нём?

Задача 9. **а)** Докажите, что интеграл от неотрицательной функции неотрицателен.
б) Верно ли, что если интеграл функции равен нулю, то и сама функция тождественно равна нулю?
в) А если эта функция неотрицательна? **г)** А если эта функция неотрицательна и непрерывна?
д)* Верно ли, что интеграл от строго положительной функции строго больше нуля?

Задача 10°. Докажите, что если $f \in \mathcal{R}([a, b])$ и для всех $x \in [a, b]$ выполнено $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то
$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Задача 11°. Докажите, что если $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ и для всех $x \in [a, b]$ выполнено $f(x) \leqslant g(x)$, то
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

1 а	1 б	2	3 а	3 б	3 в	4	5	6	7 а	7 б	7 в	8	9 а	9 б	9 в	9 г	9 д	10	11

Задача 12°. (*Линейность интеграла*) Докажите, что если $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то функция $\alpha f + \beta g$ также будет интегрируема на $[a,b]$, причём

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 13. Докажите, что

а) $I_* = I^*$ тогда и только тогда, когда $\inf_\sigma (S_\sigma - s_\sigma) = 0$;

б) если $f \in \mathcal{R}([a,b])$, то $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ и выполнено неравенство $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$;

в) если $f \in \mathcal{R}([a,b])$, то $f^2 \in \mathcal{R}([a,b])$;

г)° если $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, то $fg \in \mathcal{R}([a,b])$.

д)* Пусть $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$ и $f, g \in \mathcal{R}([0,1])$. Верно ли, что $f \circ g \in \mathcal{R}([0,1])$?

Задача 14. Докажите, что если $f \in \mathcal{R}([a,b])$ и $[c,d] \subset [a,b]$, то $f \in \mathcal{R}([c,d])$.

Задача 15°. Докажите, что монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Задача 16°. (*Аддитивность интеграла*) Пусть $a < b < c$. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на двух из трёх отрезков $[a,b]$, $[b,c]$ и $[a,c]$, то она интегрируема и на третьем, причём

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

Задача 17. Найдите: **а)** $\int\limits_{-1}^{2} x\,dx$; **б)** $\int\limits_{-2}^{1} |x|\,dx$; **в)** $\int\limits_{0}^{2} x^2\,dx$; **г)** $\int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 3x + 1)\,dx$; **д)*** $\int\limits_{0}^{1} x^n\,dx$.

Определение 4. Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве M, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любых $x, y \in M$ таких, что $|x - y| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Задача 18°. Верно ли, что функция $f(x) = 1/x$ равномерно непрерывна на множестве

а) $M = (0,1)$; **б)** $M = (1, +\infty)$?

Задача 19°. Верно ли, что функция f равномерно непрерывна на своей области определения, если **а)** $f(x) = x^2$; **б)** $f(x) = \sqrt{x}$; **в)** $f(x) = \sin x$.

Задача 20°. Докажите, что всякая равномерно непрерывная функция является непрерывной.

Задача 21°. (*Теорема Кантора*) Докажите, что непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём.

Задача 22°. Верно ли утверждение, аналогичное теореме Кантора, для функции, заданной на **а)** интервале; **б)** прямой?

Задача 23°. Докажите, что непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём.

Задача 24°. Докажите интегрируемость на отрезке **а)** ограниченной функции с конечным числом точек разрыва; **б)** функции Римана; **в)*** ограниченной функции со счётным числом точек разрыва.

12	13 а	13 б	13 в	13 г	13 д	14	15	16	17 а	17 б	17 в	17 г	17 д	18 а	18 б	19 а	19 б	19 в	20	21	22 а	22 б	23	24 а	24 б	24 в