

Опыты Майкельсона–Морли и Кеннеди–Торндайка показали, что скорость света «почти» не зависит от системы отсчёта. Если быть точнее, то было установлено, что скорости света во всех направлениях в двух системах отсчёта, движущихся относительно друг друга со скоростью 60 км/с, отличаются не более, чем на 2 м/с. Позднее, постоянство скорости света было проверено множеством различных способов и с куда большей точностью.

Постулат СТО: скорость света постоянна во всех системах отсчёта. Ничто не может передвигаться быстрее скорости света. Скорость света обозначается через c . ($c \approx 299792458$ м/с) Преобразование пространства-времени \mathbb{R}^4 , удовлетворяющие этому условию называются преобразованиями Лоренца.

Для удобства будем измерять время в метрах_c (и писать m_c). m_c — время, за которое свет пролетает один метр. На занятиях полезно иметь с собой хороший калькулятор.

Задача 1. Выразите одну величину через другую (и обратно):

- а) m_c через секунду ; б) скорость в м/с через скорость в м/ m_c ; в) год времени через m_c ; г) ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с² через ускорение в м/ m_c ².

Разберёмся сначала с «одномерным» миром. То есть множество событий — \mathbb{R}^2 . Каждую задачу нужно решить «дважды»: считая, что время измеряется в метрах и в секундах.

Задача 2. Найдите все возможные мировые линии света в \mathbb{R}^2 .

Задача 3. Опишите преобразования Лоренца в \mathbb{R}^2 .

Задача 4. а) На обычной плоскости заданы два обычных вектора (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Докажите, что площадь параллелограмма, натянутого на эти вектора равна $x_1y_2 - x_2y_1$. Это число называется *определителем* матрицы $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. б) Что происходит с определителем, если переставить строки или столбцы? в) Если умножить первую строку на число? г) Если к первой строке прибавить вторую?

Задача 5. Объясните, почему имеет смысл рассматривать только преобразования с определителем, равным единице (строго говоря, только они называются преобразованиями Лоренца).

Задача 6. Как перейти в систему отсчёта ракеты, летящей со скоростью u вправо? Как обратно?

Задача 7. Изобразите в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 множество точек: а) в которые можно попасть из данной (это множество называется *конусом будущего*); б) в которые можно посветить из данной; в) из которых можно попасть в данную (*конус прошлого*). Какой физический смысл конуса будущего и прошлого?

Задача 8. Докажите, что для любой пары различных событий найдётся ракета, в системе которой события либо одновременны (говорят, что интервал между ними *пространственноподобный*), либо происходят в одной и той же точке пространства (интервал временноподобный), либо принадлежат мировой линии света (интервал *светоподобный*).

Задача 9. Пускай одно из событий находится в начале координат. Найдите множество точек пространства-времени, для которых интервал пространственно-, временно- и светоподобный.

Задача 10. (*Парадокс поезда*) Пусть на поезде, движущемся со скоростью, близкой к скорости света (такой поезд, видимо, стоит ожидать раньше всего в Японии (если где-нибудь ещё не научатся значительно влиять на скорость света)), едут три человека: A в голове, O — в середине и B — в хвосте поезда. На земле около пути стоит четвёртый человек O' . В тот самый момент, когда O проезжает мимо O' , сигналы ламп от A и B достигают O и O' . Покажите, что на вопрос «Кто раньше включил фонарь?» наблюдатели O и O' дадут различные ответы.

Задача 11. а) Покажите, что если два события происходят одновременно и в одном и том же месте в одной системе отсчёта, то они будут одновременными в любой другой системе отсчёта. б) Покажите, что если два события происходят одновременно в разных точках в одной системе отсчёта, то они не будут одновременными ни в какой другой системе отсчёта.

Задача 12. а) Покажите, что ни время, ни расстояние не являются инвариантными в СТО. б) Докажите, что для любых событий, соединяемых пространственноподобным интервалом найдётся две ракеты такие, что в системе одной первое событие происходит раньше, а в системе второй — наоборот.

Задача 13. а) Придумайте, как реализовать матрицу преобразования Лоренца подобно матрице поворота. Аргумент, похожий на угол в матрице поворота называется *параметром скорости*.

б) Выразите всё через всё и обратно.

Задача 14. Объясните, как складываются скорости и параметры скорости.

Задача 3.

- а) Пусть A — линейная часть замены координат. Докажите, что $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$.
- б) Докажите, что $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$.
- в) Найдите вид матрицы A .

Задача 4. Как найти площадь параллелограмма?

Задача 5.

- а) Пусть в базисе $\{e_x, e_t\}$ замена имеет матрицу A с определителем $\det A$. Каков геометрический смысл знака определителя?
- б) Докажите, что имеет смысл рассматривать только преобразования с положительным определителем.
- в) Как Вы думаете, есть ли способ «надёжно» измерить метр расстояния и метр времени, то есть так, чтобы результаты были одинаковы в любой системе отсчёта?
- г) Докажите, что матрицу с положительным определителем можно представить в виде произведения матрицы с единичным определителем и константы.

Задача 6.

- а) Опишите мировую линию ракеты в системе отсчёта лаборатории и ракеты.
- б) Какое преобразование переводит мировую линию ракеты в системе отсчёта лаборатории в мировую линию ракеты в системе отсчёта ракеты?

Задача 8.

- а) (Подсказка: .0 ʘɹʌɹɔɹɔ ɐʇɹɹɐ)
- б) (Подсказка: .0 ʈɹʌɹɔɹɔ ʌɐʇɹɹɐʌɐɔɔɐ)

Задача 13.

- а) По определению $\operatorname{ch} \varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}$, $\operatorname{sh} \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}$, $\operatorname{th} \varphi = \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}$, $\operatorname{cth} \varphi = \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\operatorname{sh} \varphi}$. Докажите, что $\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1$.
- б) Пусть $\operatorname{th} \varphi = u$, и $A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & -\operatorname{sh} \varphi \\ -\operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix}$. Является ли A преобразованием Лоренца?
- в) Куда переходит мировая линия центра лаборатории при замене координат?
- г) Вычислите $\operatorname{arcsch} u$, $\operatorname{arcch} u$ и $\operatorname{arcth} u$ через u .