Листок №10 **Целые числа — 3. Основная теорема арифметики.** 02.2013

Задача 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что наименьший натуральный делитель числа n, отличный от единицы, является простым числом.

Задача 2°. Докажите, что если натуральное число n, большее единицы, не делится ни на одно из простых чисел, не превосходящих $\sqrt{n}$, то число n простое.

Задача 3. Найдите все простые числа, лежащие на числовой оси между 2010 и 2050.

Задача 4. Найдите все $p \in \mathbb{N}$, для которых числа p, $(p+10)$ и $(p+14)$ простые.

Задача 5. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел следующего вида:
а) $p = 4n - 1$, **б)** $p = 6n + 5$, **в)*** $p = 4n + 1$.

Задача 6°. (*Основная теорема арифметики*)
а) Докажите, что любое натуральное число можно разложить в произведение простых чисел.
б) Докажите, что это разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей.

Замечание 1. Более точно, представление натурального числа в виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — простые числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа, единственно. Такое разложение на простые сомножители называется *каноническим*.

Задача 7. Числа a, b, c, n натуральные, $(a, b) = 1$, $ab = c^n$. Найдётся ли такое целое x, что $a = x^n$?

Задача 8. Решите в натуральных числах уравнение $x^{42} = y^{55}$.

Задача 9°. (*Теорема Лежандра*) Докажите, что простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$ в степени $[n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \ldots$ (здесь $[x]$ — это целая часть числа x).

Задача 10. Найдите каноническое разложение числа **а)** 2013, **б)** 1002001, **в)** 17!, **г)** C_{20}^{10}.

Задача 11. **а)** На какое число нулей оканчивается число 2013!? **б)** Может ли $n!$ делиться на 2^n при каком-либо натуральном n?

Определение 1. *Общим кратным* ненулевых целых чисел a и b называется целое число, которое делится как на a, так и на b. Наименьшее среди положительных общих кратных называется *наименьшим общим кратным* чисел a и b. Обозначение: $[a, b]$.

Задача 12°. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, причём α_i, $\beta_i \geqslant 0$.
а) Найдите (a, b) и $[a, b]$. **б)** Докажите, что $ab = (a, b) \cdot [a, b]$.

Задача 13°. Докажите, что любое общее кратное чисел a и b делится на $[a, b]$.

Задача 14. Верно ли, что
а) $[ca, cb] = c \cdot [a, b]$ при $c \in \mathbb{N}$;
б) числа $[a, b]/a$ и $[a, b]/b$ взаимно просты?

Задача 15. Про натуральные числа a и b известно, что $(a, b) = 15$, $[a, b] = 840$. Найдите a и b.

Задача 16. Найдите все натуральные числа с нечётным числом натуральных делителей.

1	2	3	4	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	7	8	9	10 а	10 б	10 в	10 г	11 а	11 б	12 а	12 б	13	14 а	14 б	15	16

Задача 17. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

а) Найдите количество натуральных делителей числа n.

б) Докажите, что сумма натуральных делителей числа n равна

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

в)* Выведите формулу для суммы квадратов делителей числа n.

Задача 18*. Число, равное сумме всех своих натуральных делителей за исключением самого себя, называется *совершенным*. Докажите, что если числа p и $(2^p - 1)$ — простые, то число $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ совершенно.

Определение 2. Простые числа вида $(2^n - 1)$ называются *числами Мерсенна*.

Числа Мерсенна получили известность в связи с эффективным критерием простоты, благодаря которому простые числа Мерсенна давно удерживают лидерство как самые большие известные простые числа. Часть этого критерия простоты дана в следующей задаче. На февраль 2013 года самым большим известным простым числом является число Мерсенна $M_{57\,885\,161} = 2^{57885161} - 1$, найденное в январе 2013 года в рамках проекта распределённых вычислений GIMPS. Десятичная запись числа $M_{57\,885\,161}$ содержит 17 425 170 цифр.

Задача 19*. Докажите, что

а) если $m \vdots n$, то $(a^m - 1) \vdots (a^n - 1)$;

б) множество чисел $\{n \mid (a^n - 1) \vdots r\}$ является арифметической прогрессией для любого натурального r;

в) если $(a^n - 1)$ — простое, то $a = 2$ и n — простое.

Определение 3. Простые числа вида $(2^{2^k} + 1)$ называются *числами Ферма*.

Изучение чисел такого вида начал Ферма, который выдвинул гипотезу, что все они простые. Однако, эта гипотеза была опровергнута Эйлером в 1732 году, нашедшим разложение числа $F_5 = 4\,294\,967\,297$ на простые делители (в худшем случае понадобится проверить больше 6000 простых делителей, однако при должном трудолюбии вы сможете найти простой делитель этого числа на калькуляторе). Особый интерес числа Ферма представляют в связи с теоремой Гаусса — Ванцеля: Правильный n-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда $n = 2^r \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, где p_i — различные простые числа Ферма. На январь 2013 года известно лишь 5 простых чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65537. Существование других простых чисел Ферма является открытой проблемой.

Задача 20*. **а)** Докажите, что если число $(2^n + 1)$ — простое, то $n = 2^k$. **б)** Докажите, что числа вида $(2^{2^k} + 1)$ являются взаимно простыми при различных k. **в)** Докажите, что все делители чисел Ферма имеют вид $k \cdot 2^{n+1} + 1$.

Задача 21*. Может ли быть целым число

а) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$; **б)** $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{2n+1}$?

Задача 22*. На доске написано n натуральных чисел. За одну операцию вместо двух чисел, ни одно из которых не делится на другое, можно написать их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что

а) можно провести лишь конечное число таких операций;

б) финальный результат не зависит от порядка выполнения действий.
Например, $(4, 6, 9) \to (2, 12, 9) \to (2, 3, 36) \to (1, 6, 36)$.
Или так: $(4, 6, 9) \to (4, 3, 18) \to (1, 12, 18) \to (1, 6, 36)$.

17 а	17 б	17 в	18	19 а	19 б	19 в	20 а	20 б	20 в	21 а	21 б	22 а	22 б