Листок №9 **Целые числа — 2. Алгоритм Евклида.** 01.2013

Определение 1. Если число d делит числа a и b, то d называется *общим делителем* чисел a и b. Наибольший среди общих делителей чисел a и b называется *наибольшим общим делителем* a и b (обозначение: (a, b)). В том случае, когда $(a, b) = 1$, говорят, что числа a и b *взаимно простые.*

Задача 1. Для каких целых a и b число (a, b) существует?

Задача 2. Докажите, что **а)** для каждого целого x справедливо $(a, b) = (a,\ b + ax)$; **б)** если a кратно b, то $(a, b) = |b|$; **в)** если r — остаток от деления a на b, то $(a, b) = (b, r)$.

Задача 3. Найдите **а)** $(n, 1)$; **б)** $(n,\ n + 1)$; **в)** $(2n + 3,\ 7n + 6)$; **г)** $(n^2,\ n + 1)$.

Задача 4. Пусть a и b — два фиксированных целых числа. Обозначим через I множество всех чисел, представимых в виде $ax+by$ (x и y — целые числа). Пусть d — наименьшее положительное число в I. Докажите, что
а) каждое число из I делится на любой общий делитель чисел a и b (а значит, и на (a, b));
б) каждое число из I делится на d;
в) $d = (a, b)$.

Задача 5. Пусть a и b — два фиксированных целых числа. Обозначим через d наименьшее натуральное число, делящееся на любой общий делитель a и b. Докажите, что $d = (a, b)$.

Задача 6. (*Алгоритм Евклида*) Пусть a и b — два фиксированных натуральных числа. Будем последовательно заменять большее из этих чисел на их разность. Докажите, что:
а) в некоторый момент мы получим пару $(d, 0)$, $d \neq 0$; **б)** $(a, b) = d$;
в) все промежуточные числа представимы в виде $ax + by$ для некоторых целых x и y;
г) найдутся целые числа x и y, что $ax + by = (a, b)$;

Задача 7. Найдите **а)** $(7\,777\,777,\ 7\,777)$; **б)** $(3289, 969)$; **в)** $(7581, 1767)$; **г)** $(10946, 17711)$; **д)*** $(2^m - 1,\ 2^n - 1)$; **е)*** $(2^{2^m} + 1,\ 2^{2^n} + 1)$.

Задача 8. Как для данных чисел a и b при помощи алгоритма Евклида найти такие целые числа x и y, что $ax + by = (a, b)$?

Задача 9. Найдите целые числа x и y такие, что $ax + by = (a, b)$, в следующих случаях:
а) $a = 525$, $b = 231$; **б)** $a = 645$, $b = 381$.

Задача 10. **а)** Докажите, что для любого натурального k выполнено $(ka, kb) = k \cdot (a, b)$.
б) Докажите, что если m — общий натуральный делитель чисел a и b, то $(a/m, b/m) = (a, b)/m$.

Задача 11. Докажите, что числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие целые x и y, что $ax + by = 1$.

Задача 12. Числа a, b и c целые, $(a, b) = 1$. Докажите, что
а) если $ac \vdots b$, то $c \vdots b$; **б)** если $c \vdots a$ и $c \vdots b$, то $c \vdots ab$.

Задача 13*. Даны m целых чисел. За один ход разрешается прибавить по единице к любым n из них. При каких m и n всегда можно за несколько таких ходов сделать все числа одинаковыми?

1	2 а	2 б	2 в	3 а	3 б	3 в	3 г	4 а	4 б	4 в	5	6 а	6 б	6 в	6 г	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	7 е	8	9 а	9 б	10 а	10 б	11	12 а	12 б	13

Определение 2. Уравнение, которое требуется решить в целых числах, называется *диофантовым*. *Линейным диофантовым уравнением* называется уравнение вида $ax + by = c$. Для данного линейного уравнения уравнение $ax + by = 0$ называется *однородным.*

Задача 14.

а) Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — решения однородного уравнения. Докажите, что пары (x_1+x_2, y_1+y_2) и $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ также являются решениями однородного уравнения.

б) Пусть (x_1, y_1) и (x_1, y_2) — два решения линейного диофантового уравнения. Докажите, что пара $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ является решением соответствующего однородного уравнения.

в) Докажите, что линейное уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда c делится на (a, b).

г) Придумайте способ, как находить хотя бы одно решение уравнения $ax + by = c$.

д) Пусть (x_0, y_0) — одно из решений линейного диофантового уравнения $ax + by = c$. Докажите, что в таком случае множество всех решений $\{(x, y)\}$ описывается следующими формулами:

$$x = x_0 + \frac{bt}{(a, b)}, \quad y = y_0 - \frac{at}{(a, b)}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Задача 15. Решите следующие диофантовы уравнения: **а)** $21x + 9y = 7$; **б)** $17x + 23y = 36$; **в)** $31x - 133y = 2$; **г)** $7581x - 1767y = 171$; **д)** $nx + (2n - 1)y = 3$.

Задача 16. При каких a и b можно заплатить в кассу один рубль, имея на руках неограниченное количество a-рублёвых купюр, если в кассе есть неограниченное количество b-рублёвых купюр?

Задача 17. По окружности длины a см катится колесо, длина обода которого равна b см (a и b натуральные, $(a, b) = d$). В колесо вбит гвоздь, он оставляет отметки на окружности. Сколько отметок оставит гвоздь?

Задача 18*. Слонопотам ходит по бесконечной клетчатой доске на m клеток в одном направлении и на n в направлении, перпендикулярном первому (конь является слонопотамом с параметрами $m = 2$, $n = 1$). При каких m и n он сможет попасть **а)** в соседнюю по диагонали клетку; **б)** в соседнюю справа клетку?

Задача 19*. Решите следующие диофантовы уравнения: **а)** $x + y = xy$; **б)** $x + y + z = xyz$; **в)** $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$; **г)** $15x^2 - 9y^2 = 9$; **д)** $1! + 2! + \ldots + x! = y^2$; **е)** $1! + 2! + \ldots + x! = y^z$.

Задача 20*. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Рассмотрим множество всех чисел вида $ax + by$, где целые числа x и y неотрицательны. Докажите, что это множество содержит ровно одно число из каждой пары $(z,\ ab - a - b - z)$ где $z \in \mathbb{Z}$.

14 а	14 б	14 в	14 г	14 д	15 а	15 б	15 в	15 г	15 д	16	17	18 а	18 б	19 а	19 б	19 в	19 г	19 д	19 е	20