Листок №15 — **Бесконечные множества** — 09.2013

Определение 1. Множество называется *конечным,* если оно пусто или равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого натурального n. Говорят, что множество *бесконечно,* если оно не является конечным.

Определение 2. Множества X и Y называются *равномощными,* если существует взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$. Обозначение: $|X| = |Y|$.

Определение 3. Множество называется *конечным,* если оно пусто или равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого натурального n. Говорят, что множество *бесконечно,* если оно не является конечным.

Определение 4. Множество называется *счётным,* если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Говорят, что множество *не более чем счётно,* если оно конечно или счётно. Множество называется *несчётным,* если оно бесконечно и не является счётным.

Задача 1°. Докажите, что всякое подмножество счётного множества не более чем счётно.

Задача 2. Докажите, что следующие множества счётны:
а) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ делится на } 9\}$;
б) $\mathbb{Z}$;
в)° конечное объединение счётных множеств;
г)° счётное объединение счётных множеств.

Задача 3*. Найдите алгебраическое выражение от двух переменных x и y, задающее взаимно однозначное соответствие между множеством неотрицательных целых чисел и множеством точек плоскости, координаты которых — неотрицательные целые числа.

Задача 4. Докажите, что счётно
а) множество точек плоскости, координаты которых — целые числа;
б) множество $\mathbb{Q}$;
в)° декартово произведение счётных множеств;
г) множество предложений в русском языке;
д) множество алгебраических[1] чисел.
е) множество конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$.

Задача 5. Счётно ли **а)** множество точек плоскости, обе координаты которых рациональны;
б) множество всех треугольников на плоскости, координаты вершин которых рациональны;
в)* множество всех многоугольников на плоскости, координаты вершин которых рациональны?

Задача 6. Счётно ли любое бесконечное множество непересекающихся
а) интервалов длины более 1 на прямой;
б)° интервалов на прямой;
в) кругов на плоскости;
г) восьмёрок на плоскости (восьмёрка — это две касающиеся внешним образом окружности; восьмёрки могут быть разных размеров);
д)* букв «Т» (любых размеров) на плоскости?

1	2 а	2 б	2 в	2 г	3	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	4 е	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	6 в	6 г	6 д

[1] Число a алгебраично, если найдётся многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами, такой что $P(a) = 0$

Задача 7°.
а) Докажите, что в любом бесконечном множестве найдется счётное подмножество.
б) Пусть A не более чем счётно, а B бесконечно. Докажите, что $|A \cup B| = |B|$.

Задача 8. Равномощны ли следующие множества точек:
а) интервал и отрезок;
б) полуокружность (без концов) и прямая;
в) интервал и прямая;
г) квадрат[2] и круг;
д) квадрат и плоскость;
е) отрезок и счётное объединение множеств, равномощных отрезку?

Задача 9. Докажите, что множество S бесконечных последовательностей из 0 и 1 и множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ равномощны.

Задача 10°. **а)** Дана бесконечная вправо и вниз таблица из 0 и 1. Как по этой таблице составить бесконечную строку из 0 и 1, которая не совпадёт ни с одной из строк таблицы?
(Подсказка: надо, чтобы новая строка отличалась от каждой строки таблицы хотя бы в одном месте.)
б) Докажите, что множество S из задачи 9 несчётно.

Определение 5. Говорят, что множество *имеет мощность континуум* (*континуально*), если оно равномощно множеству S из задачи 9.

Задача 11°. (*Теорема Кантора-Бернштейна*) Если множество A равномощно подмножеству множества B и множество B равномощно подмножеству множества A, то A и B равномощны.

Задача 12. Докажите, что любой круг и любое круговое кольцо на плоскости равномощны.

Задача 13. Докажите, что следующие множества континуальны:
а) множество взаимно однозначных отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$;
б) множество бесконечных последовательностей натуральных чисел.

Задача 14. (*Теорема Кантора*) Может ли множество быть равномощно множеству всех своих подмножеств?

Задача 15*. (*Парадокс Деда Мороза*) Ровно за минуту до Нового Года Дед Мороз выдаёт Васе 10 конфет, после чего одну конфету у него забирает. За полминуты до НГ он ещё раз повторяет эту операцию. За четверть минуты — ещё раз. И так далее до бесконечности. Сколько конфет будет у Васи в Новом Году?

Задача 16*. Дано множество M положительных чисел. Известно, что для любого его конечного подмножества $N \subset M$, сумма всех чисел из N не превосходит 1. Докажите, что множество M не более чем счётно.

Задача 17*. Пусть множество S имеет мощность континуум. Докажите, что $|S \times S| = S$.

7 а	7 б	8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	8 е	9	10 а	10 б	11	12	13 а	13 б	14	15	16	17

[2]Квадрат в этом листке — это квадрат с внутренностью, например множество точек (x, y), где $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.