Прежде чем изучать специальную теорию относительности, необходимо немного изучить классическую теорию.

Чтобы говорить о каких-либо объектах, нам нужно ввести систему координат. Обычно это три координаты в пространстве и одна координата — время. После того, как координаты введены, мы можем изучать динамику тел.

Далее возникает естественный вопрос: что произойдёт, если взять другую систему координат. Так возникает понятие *инерциальной системы отсчёта.* И постулируется *принцип относительности Галилея:* если в двух замкнутых лабораториях, одна из которых равномерно прямолинейно (и поступательно) движется относительно другой, провести одинаковый механический эксперимент, результат будет одинаковым (или более формально: законы механики не зависят от того, в какой из инерциальных систем отсчета мы их исследуем).

Чтобы говорить об инерциальных системах отсчёта, необходимы несколько формальных определений.

Задача 1. Астрономы считают, что все галактики разлетаются прямолинейно по направлениям от нашей со скоростями, пропорциональными расстояниям до них. Означает ли это, что наша галактика — центр вселенной?

Задача 2. Крючок безмена заменили на более тяжёлый и одновременно параллельно сдвинули вниз шкалу, так чтобы нуль совпал с новым положением стрелки. Будет ли безмен после этого правильно измерять вес?

Определение 1. Отображение $\mathbb{R}^m \xmapsto{f} \mathbb{R}^n$ называется *линейным*, если для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполняется равенство[1] $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Отображение $\mathbb{R}^m \xmapsto{g} \mathbb{R}^n$ называется *аффинным*, если существует $a \in \mathbb{R}^m$, такое что отображение $x \longmapsto g(x+a) - g(a)$ линейно.

Задача 3. Являются ли следующие отображения аффинными или линейными?:
а) $f(x) = 0 \in \mathbb{R}$; **б)** $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}$; **в)** $f(x) = (57x, 179x + 57) \in \mathbb{R}^2$;
г) $f(x_1, x_2) = -3(x_1 - x_2) \in \mathbb{R}$; **д)** $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1 - 1, x_1) \in \mathbb{R}^2$;
е) $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2 + 1, x_1^2 + x_2^2) \in \mathbb{R}^3$?

Задача 4. На плоскости фиксированы три точки: O, A и B. Нарисуйте множество точек $\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ при **а)** $\lambda + \mu = 1$; **б)** $\lambda, \mu > 0$.

Задача 5. Пусть линейное отображения $\mathbb{R}^2 \xmapsto{f} \mathbb{R}^2$ переводит базисные векторы $e_1 = (1,0)$ и $e_2 = (0,1)$ в векторы (a,c) и (b,d) соответственно. Куда она переведёт вектор (x,y)?

Задача 6. Опишите все линейные и все аффинные отображения
а) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ **б)** $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ **в)** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **г)** $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Задача 7. Изменим в определении аффинного отображения фразу «существует $a \in \mathbb{R}^m$» на фразу «для любого $a \in \mathbb{R}^m$». Будет ли новое определение эквивалентно исходному?

Задача 8. **а)** Докажите, что множество всех линейных отображений $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ образует коммутативную группу по сложению (то есть сложение коммутативно, ассоциативно и имеет обратный элемент). Обозначение: $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (от слова «гомоморфизм»); **б)** Докажите, что множество всех линейных функций $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с операцией сложения изоморфна $\mathbb{R}^4$ (то есть существует биекция φ такая, что $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$).

Задача 9. Пусть задано некоторое биективное отображение $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Известно, что точка в $\mathbb{R}^m$ движется равномерно и прямолинейно тогда и только тогда, когда её образ движется равномерно и прямолинейно. Докажите, что преобразование f аффинно.

Определение 2. Набор векторов $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$ называется базисом, если для любого вектора w найдётся единственный набор чисел $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ (который называется координатами вектора w в этом базисе), что

$$w = \lambda v_1 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

Задача 10. **а)** Опишите все базисы в $\mathbb{R}^1$; **б)** Докажите, что в любом базисе в $\mathbb{R}^2$ ровно два вектора.

[1] $\lambda\,(x_1, \ldots, x_m) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m)$ и $(x_1, \ldots, x_m) + (y_1, \ldots, y_m) = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m)$

<?xml version=’1.0’?>
<listok number = ’RT1’ description=’Линейные преобразования’ type=’1’ date=’02.2015’>
<problem group=’1’ type=’0’>1</problem>
<problem group=’2’ type=’0’>2</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3а</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3б</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3в</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3г</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3д</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3е</problem>
<problem group=’4’ type=’0’>4а</problem>
<problem group=’4’ type=’0’>4б</problem>
<problem group=’5’ type=’0’>5</problem>
<problem group=’6’ type=’0’>6а</problem>
<problem group=’6’ type=’0’>6б</problem>
<problem group=’6’ type=’0’>6в</problem>
<problem group=’6’ type=’0’>6г</problem>
<problem group=’7’ type=’0’>7</problem>
<problem group=’8’ type=’0’>8а</problem>
<problem group=’8’ type=’0’>8б</problem>
<problem group=’9’ type=’0’>9</problem>
<problem group=’10’ type=’0’>10а</problem>
<problem group=’10’ type=’0’>10б</problem>
</listok>