Листок №17 Поле действительных чисел 11.2013

Определение 1. Пусть F — упорядоченное поле. Для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим элемент $\overline{n} = \overbrace{1+1+\ldots+1}^{n \text{ раз}} \in F$. Для любого целого числа $m \in \mathbb{Z}$ рассмотрим элемент $\overline{m}$, если $m \in \mathbb{N}$, элемент 0, если $m = 0$, и элемент $\overline{-m}$, если $-m \in \mathbb{N}$. Для любого рационального числа $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ рассмотрим элемент $\overline{q} = \dfrac{\overline{m}}{\overline{n}} \in F$. Таким образом множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ естественным образом вложены в F. В дальнейшем, говоря о натуральных/целых/рациональных числах как об элементах поля F, мы не будем писать черту над ними.

Аксиома 1. (*Аксиома Архимеда*) Для любого $a \in \mathbb{F}$ найдется такое натуральное $n \in F$, что $n > a$.

Аксиома 2. (*Принцип вложенных отрезков*) Пусть дана последовательность вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$. Тогда пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ не пусто.

Определение 2. Упорядоченное поле F, называется *полным*, если в нём выполнена аксиома Архимеда и принцип вложенных отрезков.

Определение 3. Полное линейно упорядоченное поле называется *полем действительных чисел*. Обозначение: $\mathbb{R}$. Множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ называется множеством *иррациональных чисел*.

Задача 1. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Задача 2°. Докажите, что между любыми двумя различными числами из $\mathbb{R}$ найдётся бесконечно много рациональных чисел.

Задача 3. Докажите, что пересечение последовательности вложенных отрезков $\big([a_n, b_n]\big)$ состоит из одной точки тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Задача 4. Приведите пример упорядоченного поля, в котором не выполняется
а) аксиома Архимеда; **б)** принцип вложенных отрезков.

Задача 5*. Выполняется ли принцип вложенных отрезков в поле $\mathbb{R}(x)$ рациональных функций с вещественными коэффициентами?

Задача 6. **а)** Докажите, что не существует такого $q \in \mathbb{Q}$, что $q^2 = 2$.
б) Рассмотрим последовательность вложенных отрезков $\big([1/b_n, b_n]\big)$, где $b_1 = 2$ и $b_n = \dfrac{1}{2}\left(b_{n-1} + \dfrac{2}{b_{n-1}}\right)$ при $n > 1$. Докажите, что они в $\mathbb{R}$ имеют единственную общую точку. Какую?
в)° Докажите, что множество иррациональных чисел непусто.

Задача 7. Докажите, что между любыми двумя различными числами из $\mathbb{R}$ найдётся бесконечно много иррациональных чисел.

Задача 8°. (*Аксиома о разделяющем числе*) Пусть A и B — два непустых подмножества поля $\mathbb{R}$, такие что для всех $a \in A$ и $b \in B$ справедливо неравенство $a \leqslant b$. Докажите, что существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что при всех $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $a \leqslant c \leqslant b$.

1	2	3	4 а	4 б	5	6 а	6 б	6 в	7	8

Определение 4. Говорят, что подмножество M упорядоченного поля F *ограничено сверху*, если существует такой элемент C, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $x \leqslant C$. Число C в этом случае называется *верхней гранью* множества M.
Формально: $\exists\, C \in F \quad \forall\, x \in M: \quad x \leqslant C$.
Аналогично определяется *ограниченность снизу* и *нижняя грань* множества.

Задача 9. Верно ли, что множество положительных чисел P ограничено сверху? А снизу?

Определение 5. Говорят, что подмножество M упорядоченного поля F *ограничено*, если оно ограничено сверху и снизу одновременно.

Определение 6. *Модулем* (*абсолютной величиной*) элемента a упорядоченного поля F называется элемент $|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0 \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$

Определение 7. Элемент C упорядоченного поля F называется *точной верхней гранью* множества M, если выполняются следующие два условия:
1) $\forall\, x \in M: \quad x \leqslant C$;
2) $\forall\, C_1 < C \quad \exists\, x \in M: \quad x > C_1$.

Условие 2) иногда записывают в следующей форме: $2')$ $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in M: \quad x > C - \varepsilon$.
Обозначение: $C = \sup M$ (читается: *супре́мум*).

Определение 8. Элемент C упорядоченного поля F называется *точной верхней гранью* множества M, если C есть наименьшая из всех верхних граней множества M.

Задача 10. Докажите эквивалентность определений 7 и 8.

Определение 9. Аналогично определяется *точная нижняя грань* множества.
Обозначение: $\inf M$ (читается: *инфи́мум*).

Задача 11. Может ли у множества быть более одной точной верхней (нижней) грани?

Задача 12. Найдите точные нижнюю и верхнюю грани множества M, если:
а) $M = \left\{\frac{1}{a} \mid a > 2\right\}$; **б)** $M = \{a + b \mid -5 < a \leqslant 3,\ |b| < 1\}$; **в)** $M = \{ab \mid -5 < a \leqslant 3,\ |b| < 1\}$.

Задача 13°. (*аксиома о точной верхней грани*) Докажите, что всякое непустое ограниченное сверху подмножество поля $\mathbb{R}$ имеет в $\mathbb{R}$ точную верхнюю грань.

Задача 14°. Пусть множества $A, B \subset \mathbb{R}$ ограничены и непусты. Докажите, что:
а) $\sup\{a + b \mid a \in A,\ b \in B\} = \sup A + \sup B$; **б)** $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Задача 15°. Докажите, что в упорядоченном поле F полнота эквивалентна
а) аксиоме о разделяющем числе;
б) аксиоме о точной верхней грани.

Задача 16*. Докажите, что поле действительных чисел континуально.

Задача 17*. Докажите, что поле действительных чисел не более, чем единственно.

Задача 18*. **а)** Докажите, что $\{a \in \mathbb{R} \mid a \geqslant 0\} = \{b^2 \mid b \in \mathbb{R}\}$.
б) Докажите, что поле $\mathbb{R}$ нельзя упорядочить двумя разными способами.

9	10	11	12 а	12 б	12 в	13	14 а	14 б	15 а	15 б	16	17	18 а	18 б