Листок №6д Группы преобразований — 1 01.2014

Напоминание. Отображение $\varphi\colon X \to Y$ из множества X в множество Y называется *взаимно однозначным* (или *биекцией*), если для каждого элемента $y \in Y$ существует ровно один элемент x такой, что $\varphi(x) = y$.

Преобразование ψ называется *тождественным*, если для каждого $x \in X$ выполнено равенство $\psi(x) = x$. Обозначение: $\psi = \mathrm{id}_X$.

Отображение $\varphi\colon X \to Y$ называется *обратным* для отображения $\psi\colon Y \to X$, если справедливы равенства $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$ и $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$. Обозначение: $\varphi = \psi^{-1}$

Количество элементов во множестве X обозначается через $|X|$ или $\#X$.

Определение 1. *Преобразованием* множества X называется любая биекция $\varphi\colon X \to X$. Для множества всех преобразований X зарезервировано обозначение $S(X)$.

Определение 2. *Группой преобразований* множества X называется всякая непустая совокупность его преобразований G, удовлетворяющая следующим свойствам:

(i) G замкнута относительно композиции, то есть для всех $g, h \in G$ верно: $g \circ h \in G$;

(ii) G замкнута относительно взятия обратного преобразования, то есть для всех $g \in G$ преобразование g^{-1} лежит в G.

Задача 1. Докажите, что группа преобразований любого множества содержит тождественное преобразование.

Задача 2. Пусть множество X — это квадрат $ABCD$. Обозначим через s_{ac}, s_{bd}, s_H и s_V симметрии относительно диагонали AC, диагонали BD, горизонтали и вертикали квадрата соответственно. Далее, обозначим через r_0, r_1, r_2 и r_3 повороты вокруг центра квадрата на $0°$, $90°$, $180°$ и $270°$ соответственно.

а) Докажите, что $G = \{s_{ac}, s_{bd}, s_H, s_V, r_0, r_1, r_2, r_3\}$ образует группу преобразований квадрата.

б) Выпишите таблицу умножения в этой группе.

в) Придумайте группу преобразований квадрата, состоящую из четырёх преобразований.

Задача 3.

а) Докажите, что для любого множества X множество $S(X)$ является группой;

б) Пусть X — конечно, причём $|X| = n$. Найдите $|S(X)|$.

Замечание 1. В условиях задачи 3б) группа $S(X)$ называется *симметрической группой* и обозначается S_n.

Задача 4. **а)** Опишите все преобразования правильного треугольника, сохраняющие расстояния между любыми двумя его точками.

б) Докажите, что эти преобразования образуют группу.

Определение 3. *Порядком элемента* g группы преобразований G называется наименьшее натуральное k такое, что $g^k = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_{k} = \mathrm{id}$. Обозначение: $\mathrm{ord}(g)$.

Определение 4. *Порядком группы* G называется количество элементов в G. Обозначение: $|G|$ или $\#G$.

Задача 5. Найдите порядок каждого элемента групп из задач 2 и 4.

Задача 6. Пусть множество X является подмножеством прямой, плоскости или пространства. Рассмотрим множество $\mathrm{Isom}(X) = \{\varphi \in S(X) \mid \varphi \text{сохраняет расстояния}\}$. Докажите, что вне зависимости от X множество преобразований $\mathrm{Isom}(X)$ является группой. Эта группа называется *группой движений* X.

Задача 7. Перечислите все элементы и их порядки в группах движений следующих множеств:
а) прямоугольник; **б)** правильный m-угольник; **в)** правильный тетраэдр; **г)** куб; **д)*** октаэдр; **е)*** икосаэдр; **ж)*** додекаэдр.

(Подсказка: Как связаны между собой куб и октаэдр? Тот же вопрос для икосаэдра и додекаэдра.)

Замечание 2. Группа из задачи 7б) называется *группой диэдра* и обозначается D_m.

1	2 а	2 б	2 в	3 а	3 б	4 а	4 б	5	6	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	7 е	7 ж