Признаки сходимости рядов

Задача 1. Докажите следующие признаки сходимости:

а) (*Признак сравнения Вейерштрасса*) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с неотрицательными членами. Пусть найдётся такой номер k, что при всех $n > k$, $n \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $b_n \geqslant a_n$. Тогда если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

б) (*Признак д'Аламбера*) Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны, и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда если $q < 1$, то ряд сходится, а если $q > 1$, то ряд расходится. Что можно сказать о сходимости ряда, если $q = 1$?

в) (*Признак Коши*) Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны, и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда если $q < 1$, то ряд сходится, а если $q > 1$, то ряд расходится. Что можно сказать о сходимости ряда, если $q = 1$?

г) (*Телескопический признак*) Пусть последовательность a_n неотрицательна и монотонно невозрастает. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Задача 2. Приведите пример сходящегося ряда с положительными членами, к которому применим признак Коши, но не применим признак д'Аламбера. Бывает ли наоборот?

Задача 3. Исследуйте ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{2^n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos x^n}{n^2}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; **д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{(2+1/n)^n}$; **ж)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$; **з)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$; **и)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$; **к)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^k}{a^n}$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$.

Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Задача 4. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Задача 5. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится. Тогда абсолютно сходится произвольный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный из него перестановкой слагаемых, причём $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

1 а	1 б	1 в	1 г	2	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	3 е	3 ж	3 з	3 и	3 к	3 л	4	5

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Задача 6. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

а) Докажите, что ряд, составленный из его положительных (или отрицательных) членов, расходится.

б) (*Теорема Римана*) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можно превратить перестановкой слагаемых как в расходящийся ряд, так и в сходящийся с произвольной наперёд заданной суммой.

в) Докажите, что можно так сгруппировать члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (не переставляя их), что ряд станет абсолютно сходящимся.

г)* Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд, составленный из комплексных чисел, S — множество всех перестановок σ натурального ряда, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится. Каким может быть множество $\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S\}$?

Задача 7. Пусть s — сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Найдите суммы

а) $1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{6} + \ldots$; **б)** $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{12} + \ldots$.

в) Переставьте члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ так, чтобы он стал расходящимся.

Задача 8. Существует ли такая последовательность (a_n), $a_n \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}$, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 a_n}$ сходятся? Можно ли выбрать такую последовательность из положительных чисел?

Задача 9*. Существует ли такая последовательность (a_n), что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится?

Задача 10*. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для любого сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ сходится. Докажите, что тогда найдётся такое число $C \in \mathbb{R}$, что $f(x) = Cx$ в некоторой окрестности нуля.

6 а	6 б	6 в	6 г	7 а	7 б	7 в	8	9	10