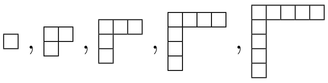
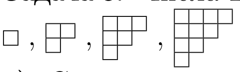
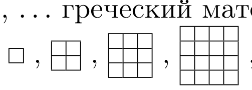
Задача 1. Рассмотрим последовательность «уголков»:  , … Сколько клеток в k-том уголке и чему равна суммарная площадь первых k уголков?

Задача 2. **а)** Чему равно k-е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел? **б)** Чему равно k-е чётное число и сумма первых k чётных чисел? **в)** Вычислите сумму 100 последовательных нечётных чисел, начиная с 57.

Задача 3. Числа $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, … греческий математик Диофант называл *треугольными*:  , … *Четырёхугольные числа*  , … — это квадраты.

а) Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат.
б) Что получится при сложении T_n с T_n? **в)** Выразите T_n через n (и тем самым получите формулу для суммы $1 + 2 + 3 + \cdots + n$).

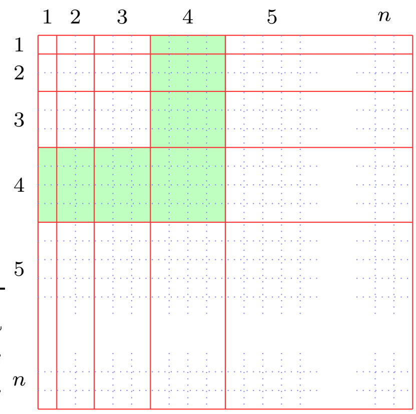


Рис. 1. Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до n

Задача 4. Найдите сумму первой сотни натуральных чисел.

Задача 5. Докажите геометрически: **а)** $T_{m+n} = T_m + T_n + mn$;
б) $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = n^2$.

Задача 6. (*Пифагорова таблица умножения*) **а)** Каковы размеры и площадь таблицы на рисунке 1? **б)** Сколько клеток в k-м, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» уголке, «вершина» которого — квадрат $k \times k$ клеток, а стороны составлены из прямоугольников $1 \times k$, $2 \times k$, …, $(k-1) \times k$ клеток? **в)** Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

Задача 7. Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление:
$3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$, …

Задача 8. *Пятиугольные числа* $P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, $P_4 = 22$, … показаны на рисунке 2. Найдите разность $P_k - P_{k-1}$ между последовательными пятиугольными числами. Выразите P_n через n.

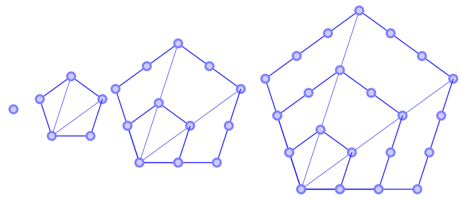


Рис. 2. Пятиугольные числа.

Задача 9. Докажите геометрически, что сумма n-го треугольного и n-го четырёхугольного числа на n больше, чем n-ое пятиугольное число.

Задача 10*. Число k^2 можно представлять себе как объём параллелепипеда $1 \times k \times k$, а сумму $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ — как объём пирамиды, сложенной из таких параллелепипедов. Будем обозначать эту пирамиду $Sq(n)$ (на рисунке 3 изображена пирамида $Sq(2)$ объёмом $1^2 + 2^2$). Сложите из шести пирамид $Sq(n)$ параллелепипед. Каковы его размеры и объём? Выведите формулу для суммы $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

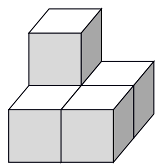


Рис. 3. Пирамида для $1^2 + 2^2$

Задача 11. На рисунке справа изображены несколько пирамид высоты 4, каждая из них состоит из $T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ кубиков. **а)** Выберите одну из пирамид на рисунке и нарисуйте её горизонтальные слои: нижний, второй снизу, …, верхний. **б)** Нарисуйте передний, второй спереди, …, задний слои выбранной пирамиды; **в)** Нарисуйте самый левый, второй слева, …, самый правый слои выбранной пирамиды. **г)** Сложите из шести пирамид такого вида параллелепипед. Каковы его размеры?

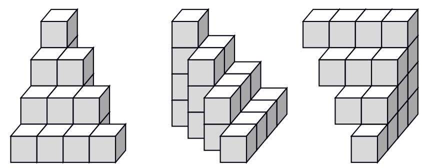


Рис. 4. Интересные пирамиды

д) Как сложить параллелепипед из шести пирамид аналогичного вида, но высоты n? Найдите формулу для суммы треугольных чисел $T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ (эта сумма обозначается Π_n и называется *n-ым пирамидальным числом*). **е)** Сложите из двух таких пирамид высоты n и высоты $n-1$ пирамиду $Sq(n)$ и выведите формулу для суммы $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. **ж)** Докажите геометрически, что
$T_1 + T_2 + \cdots + T_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$.

Задача 12*. Найдите сумму квадратов первых n нечётных чисел.

Задача 13*. Найдите (каким-нибудь способом) формулу для суммы $\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_n$.

Задача 14*. На рисунке справа изображена таблица умножения чисел 1, 2, …, n на числа 1^2, 2^2, …, n^2. **а)** Найдите сумму всех чисел в этой таблице. **б)** Найдите сумму чисел, стоящих в выделенном уголке (представьте в виде многочлена от k). **в)** Выведите формулу для суммы $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$.

	1^2	2^2	3^2	k^2	n^2
1	1	4	9	$1{\cdot}k^2$	$1{\cdot}n^2$
2	2	8	18	$2{\cdot}k^2$	$2{\cdot}n^2$
3	3	12	27	$3{\cdot}k^2$	$3{\cdot}n^2$
k	$k{\cdot}1^2$	$k{\cdot}2^2$	$k{\cdot}3^2$	$k{\cdot}k^2$	$k{\cdot}n^2$
n	$n{\cdot}1^2$	$n{\cdot}2^2$	$n{\cdot}3^2$	$n{\cdot}k^2$	$n{\cdot}n^2$

Интересно, какие ещё суммы можно найти с помощью геометрических рассуждений?

1	2 а	2 б	2 в	3 а	3 б	3 в	4	5 а	5 б	6 а	6 б	6 в	7	8	9	10	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	11 е	11 ж	12	13	14 а	14 б	14 в

Примечание. Идеи геометрического суммирования чисел восходят ко временам Древней Греции. Тогда же, по всей видимости, впервые были хорошо изучены свойства так называемых *фигурных чисел*, включающих в себя треугольные, четырёхугольные, пятиугольные, шестиугольные и т. д. Согласно философским взглядам пифагорейцев, фигурные числа играют важную роль в структуре мироздания. Наиболее ёмко эти взгляды выражает фраза, приписываемая основателю школы, Пифагору Самосскому (570—490 гг. до н. э.): «Всё есть число».

Фигурные числа интересовали математиков и в дальнейшем. Одна из самых любопытных теорем, связанных с ними, была обнаружена французским математиком Пьером Ферма́ (1601-1665 гг.), и заключается в следующем. Оказывается, любое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более, чем n n-угольных чисел. В частности, любое натуральное число представимо в виде суммы не более, чем четырёх квадратов. Полное доказательство теоремы впервые было дано в 1813 году другим французом — Огюсте́ном Луи́ Коши́ (1789-1857 гг.).