

Задача 5. Пусть F — поле. Докажите, что

- а) для любого a из F выполнено равенство $a \cdot 0 = 0$;
 б) если для элементов a и b из F справедливо равенство $a \cdot b = 0$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.
 в)* Останется ли верным утверждение пункта б), если отказаться от аксиомы М4?

Задача 6. Пусть F — поле, $a \in F$. Докажите, что

- а) $a \cdot (-1) = -a$; б) $(-a) \cdot (-a) = a \cdot a$; в) если $a \neq 0$, то $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.

Задача 7. Пусть F — поле, $a, b, c, d \in F$, причём $b, d \neq 0$. Докажите, что

- а) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$; б) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$.

Задача 8. Существует ли поле, состоящее из

- а) одного элемента; б) двух элементов; в) трёх элементов; г)* четырёх элементов?

Задача 9*. Пусть p — простое число. Постройте поле, состоящее из p элементов.

Задача 10*. Существует ли поле, состоящее из шести элементов?

5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	8 а	8 б	8 в	8 г	9	10

Примечание. Этот листочек открывает собой дорогу, которая через некоторое время приведёт нас к ответу на вопрос, чем же на самом деле является действительное число. Путь может показаться вам длинным и извилистым, однако продравшись через тернии, в конце вы обнаружите, что вознаграждены за ваши труды по заслугам (хотя, возможно, и не сразу поймёте это). Математики искали этот путь столетиями, но нашли только в конце XIX-го века — по человеческим меркам совсем недавно. Случилось это благодаря таким учёным, как Карл Вейерштрасс (1815-1897 гг.), Рихард Дедекинд (1831-1916 гг.), Георг Кантор (1845-1918 гг.), Эдуард Гейне (1821-1881 гг.) и др.

Концепция теории поля впервые была использована в работах норвежца Нильса Хенрика Абеля (1802-1829 гг.) и француза Эвариста Галуа (1811-1832 гг.), посвящённых невозможности разрешить в радикалах полиномиальные уравнения пятой степени и выше. Термин «поле» в 1871 году ввёл Дедекинд, изучая действительные и комплексные числа, хотя сказать так было бы не совсем точно. На самом деле, немецкое слово «Körper», зарезервированное для этого понятия, дословно означает «тело», «корпус» (что подразумевает структурно замкнутую сущность). Поле («field», если по-английски) его назвал в 1893 году американский учёный Элиаким Гастингс Мур (1862-1932 гг.). И в том же году впервые было сформулировано аксиоматическое определение поля в современном виде — это сделал немецкий математик Генрих Мартин Вёбер (1842-1913 гг.)