Определение 1. Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если существует такая бесконечно малая последовательность (α_n), что при всех натуральных n выполнено равенство $x_n = a + \alpha_n$. Говорят также, что (x_n) *стремится (сходится) к a при n, стремящемся к бесконечности*, и пишут $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Про последовательность, у которой предела нет, говорят, что она *расходится*.

Определение 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \mid |x-a| < \varepsilon\}$ называется *ε-окрестностью* точки a (или, что то же самое, *окрестностью радиуса ε*). Обозначение: $U_\varepsilon(a)$.

Определение 3. Говорят, что *почти все* члены последовательности (x_n) удовлетворяют условию P, если лишь конечное число элементов x_i условию P не удовлетворяет.

Определение 4. Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если для каждого $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности числа a содержатся почти все члены последовательности (x_n).

Определение 5. Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число k, что при всех натуральных $n > k$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Формально: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, n > k:\ |x_n - a| < \varepsilon$.

Задача 1°. Докажите, что определения 1, 4 и 5 эквивалентны.

Задача 2. Сформулируйте без отрицания (в т.ч. на языке кванторов):
а) Число a не является пределом последовательности (x_n).
б) Последовательность (x_n) не является сходящейся.

Задача 3. Докажите, что последовательность не может иметь более одного предела.

Задача 4. Найдите предел последовательности (x_n) (если он существует) в случае, если:
а) $x_n = \dfrac{n}{n+5}$; **б)** $x_n = (-1)^n$; **в)** $x_n = -\sqrt{n}$; **г)** $x_n = q^n$ $(q \in \mathbb{R})$; **д)** $x_n = 0,\underbrace{2\ldots2}_{n}$.

Задача 5°. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Верно ли обратное?

Задача 6. Пусть предел последовательности (x_n) положителен.
а) Верно ли, что все её члены, начиная с некоторого, положительны?
б) Докажите, что если $x_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то последовательность $(1/x_n)$ ограничена.

Задача 7. Пусть последовательности (x_n) и (y_n) сходятся. Докажите, что:
а) если для почти всех натуральных n выполняется равенство $x_n = y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
б) если для почти всех натуральных n выполняется неравенство $x_n \geqslant y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Задача 8°. (*Принцип двух милиционеров*) Пусть (x_n), (y_n) и (z_n) — такие последовательности, что почти для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и, кроме того, справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Докажите, что тогда последовательность (y_n) сходится, причём $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Задача 9°. (*Арифметика пределов*) Пусть $c \in \mathbb{R}$, последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Докажите, что:
а) последовательность $(c \cdot x_n)$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot a$;
б) последовательность $(x_n \pm y_n)$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;
в) последовательность $(x_n \cdot y_n)$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;
г) если $b \neq 0$ и $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ y_n \neq 0$, то последовательность (x_n/y_n) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n/y_n) = (a/b)$;
д) если $x_n \geqslant 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, то последовательность $(\sqrt[k]{x_n})$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$.

1	2 а	2 б	3	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	5	6 а	6 б	7 а	7 б	8	9 а	9 б	9 в	9 г	9 д

Задача 10. Найдите ошибку в следующем рассуждении: «Пусть $x_n = \dfrac{n-1}{n}$. Тогда очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0$. Итого $0 = 1$.»

Задача 11. Найдите предел последовательности (x_n) или докажите, что его нет, если:
а) $x_n = \dfrac{2n-5}{7n+4}$; **б)** $x_n = \dfrac{5n^3-9n+4}{6n^4+7n-5}$; **в)** $x_n = \dfrac{n^9+3n^4-4n+1}{n^7+5n^2+2}$; **г)** $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+3n}}$;
д) $x_n = \dfrac{C_n^{37}}{n^{37}}$; **е)** $x_n = \dfrac{n^{57}}{91^n}$; **ж)** $x_n = \dfrac{n^{n+179}}{2015\cdot n!}$; **з)** $x_n = \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

Задача 12. Найдите предел последовательности (x_n) или докажите, что его нет, если:
а) $x_n = \sqrt[n]{q}$; **б)** $x_n = 1+\ldots+q^n$; **в)** $x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; **г)** $x_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n}$.

Определение 6. Говорят, что последовательность (x_n) *бесконечно большая* (*стремится к бесконечности*), если для любого числа $C \in \mathbb{R}$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для всех натуральных $n > k$ выполняется неравенство $|x_n| > C$. Формально: $\forall\, C \in \mathbb{R}\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > k:\ |x_n| > C$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Задача 13°. Сформулируйте, что значит $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, а также $x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Задача 14°. Пусть $x_n \neq 0$ для всех натуральных n. Докажите, что последовательность (x_n) бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $(1/x_n)$ бесконечно большая.

Задача 15. Какие из следующих последовательностей являются бесконечно большими, стремятся к «$+\infty$» или «$-\infty$»: **а)** $x_n = (-1)^n n$; **б)** $x_n = n^{(-1)^n}$; **в)** $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^k} + \cdots + \dfrac{1}{n^k}$ $(k \in \mathbb{N})$?

Задача 16. Про последовательность (x_n) известно, что она имеет предел.
а) Докажите, что $(x_{n+1} - x_n)$ — бесконечно малая последовательность. Верно ли обратное?
б) Сходится ли последовательность $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$? Какие значения может принимать предел?

Задача 17. Последовательность (x_n) с положительными членами такова, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$, меньший единицы. Докажите, что (x_n) бесконечно малая.

Задача 18*. С незапамятных времён жители островов Чунга и Чанга раз в год обмениваются драгоценностями. Жители Чунги привозят половину своих драгоценностей на Чангу, а жители Чанги одновременно привозят треть своих драгоценностей на Чунгу. Какая часть драгоценностей находится на каждом из островов? (Новые драгоценности за это время на островах не появлялись, а старые не терялись).

Задача 19*. Петя шёл из дома в школу. На полпути он решил, что лучше пойти в кино, и свернул к кинотеатру. На полпути к кинотеатру ему захотелось покататься на коньках, и он повернул к катку. Пройдя половину пути до катка, он подумал, что нужно всё-таки учиться, и повернул к школе. Но на полпути к школе снова свернул к кинотеатру, и так далее. Куда придёт Петя, если и дальше будет действовать таким образом?

Задача 20*. Дано m последовательностей, сумма которых стремится к $m\alpha$, а сумма квадратов которых стремится к $m\alpha^2$. Докажите, что каждая из них стремится к α.

10	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	11 е	11 ж	11 з	12 а	12 б	12 в	12 г	13	14	15 а	15 б	15 в	16 а	16 б	17	18	19	20