Листок №3д **Арифметика** 09.2014

В математике часто встречаются множества, элементы которых можно складывать, вычитать, умножать, а иногда и делить. Такие множества называются *кольцами.* Вот некоторые примеры колец:

$\mathbb{Z}$ — *целые числа.*

$\mathbb{R}$ — *действительные числа.*

$\mathbb{Z}[i]$ — *гауссовы числа,* т.е. множество выражений вида $a+bi$, где a и b — целые, а $i^2=-1$.

$\mathbb{R}[x]$ — *многочлены,* т.е. множество выражений вида $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1+a_0$, где $a_k\in\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}[[x]]$ — *ряды,* т.е. множество выражений вида $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$, где $a_k\in\mathbb{R}$ (более точно $\mathbb{R}[[x]]$ стоило бы назвать *формальными степенными рядами).*

Действия с целыми и действительными числами выполняются естественным образом. Операции в $\mathbb{Z}[i]$ можно выполнять, раскрывая скобки по обычным правилам. В кольцах $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{R}[[x]]$ сложение происходит покоэффициентно, а для умножения нужно раскрыть скобки и привести подобные члены.

Задача 1. Выполните действия с многочленами:
а) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$;
б) $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9)^2$;
в) $(x^4-9x^3+16x^2+36x-80)/(x^2-4)$;
г) $(x^{56}+x^{55}+x^{54}+\ldots+x^2+x+1)/(x^{18}+x^{17}+\ldots+x+1)$.

Задача 2. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют целые коэффициенты, причем каждый из них имеет хотя бы один нечётный коэффициент. Докажите, что у произведения $P(x)Q(x)$ также есть хотя бы один нечётный коэффициент.

Задача 3. Выполните действия с гауссовыми числами:
а) $(1+i)(1-i)+1$; **б)** $(2+3i)(-3-i)+(-2+2i)(5-3i)$; **в)** $\dfrac{20i}{1-2i}$; **г)** $\dfrac{16+11i}{3-2i}$;
д) извлеките квадратный корень из числа $5+12i$.

Задача 4. Нарисуйте на координатной плоскости Oxy все числа вида $x+yi=(2+i)(a+bi)$, где $-2\leqslant a,b\leqslant 4$.

Задача 5. Выполните действия с рядами:
а) $(1-x)(1+x+x^2+x^3+\ldots)$; **б)** $(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1-x+x^2-x^3+\ldots)$;
в) $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^2$; **г)** $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^3$;
д) $\dfrac{x}{1+2x^3}$; **е)** $(2+3x+3x^2+3x^3+3x^4+\ldots)\left(1-\dfrac{3x}{2}+\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{3x^3}{8}+\dfrac{3x^4}{16}-\ldots\right)$;
ж)* $\dfrac{1+x}{1-3x+3x^2-x^3}$; **з)*** $\dfrac{1}{1-x-x^2}$.

Задача 6. Извлеките квадратный корень из рядов **а)** $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$; **б)*** $1+x$.

Задача 7. Как по коэффициентам ряда понять, является ли он полным квадратом?

Определение 1. Пусть M — одно из перечисленных в начале листка множеств. Говорят, что элемент a из M *делится* на элемент b из M $(b\neq 0)$, если в M найдется такой элемент c, что $a=bc$.

Задача 8. Делится ли **а)** $x^{1000}+x^{999}+\ldots+x+1$ на $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$;
б) x^4+x-2 на $x+2$ (многочлены) **в)** 57 на $x-2$ (многочлены); **г)** 57 на $x-2$ (ряды);
д) $12+3i$ на $2+i$; **е)** $6+17i$ на $4i-3$?

1 а	1 б	1 в	1 г	2	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	4	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	5 е	5 ж	5 з	6 а	6 б	7	8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	8 е

Примечание. Зарождение теории колец произошло в конце XIX-го века в связи с изучением многочленов и целых алгебраических (в частности, гауссовых) чисел. Одними из первых использовали новую концепцию немецкие математики Ри́хард Дедеки́нд (1831-1916 гг) и Дави́д Ги́льберт (1862-1943 гг), последнему также принадлежит и сам термин «кольцо». Однако их исследования затрагивали, в основном, коммутативные кольца (то есть такие, в которых $ab=ba$ для любых элементов a и b). Некоммутативные кольца и современная аксиоматика оказались вовлечены в оборот в первой трети XX-го века благодаря работам Абраха́ма (Адо́льфа) Фре́нкеля (1891-1965 гг) и Э́мми Нётер (1882-1935 гг). Дальнейшее развитие теория получила трудами Э́миля А́ртина (1898–1962 гг), Николя́ Бурбаки́ (за этим псевдонимом скрывалась целая группа математиков) и многих других учёных. И на сегодняшний день теория колец является одной из самых бурно развивающихся областей математики.