Листок №11д

Выпуклость

09.2016

Определение 1. Пусть M — связное множество. Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз* на M, если любая хорда её графика лежит не ниже самого графика.

Задача 1. Дайте определение *выпуклой вверх* функции.

Задача 2. Докажите, что функция $f(x) = x^2$ выпукла вниз на всей числовой прямой.

Задача 3. Пусть M — связное множество. Докажите, что функция f выпукла вниз на множестве M тогда и только тогда, когда её *надграфик* на M, то есть $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in M,\ y \geqslant f(x)\}$, — выпуклое множество (множество M — *выпуклое*, если для любых $A, B \in M$ отрезок AB также содержится в M).

Задача 4. Пусть M — связно, $x, y \in M$. Докажите, что если функция f выпукла вниз на M, то:
а) $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$; **б)** $f\left(\dfrac{1}{3}\cdot x + \dfrac{2}{3}\cdot y\right) \leqslant \dfrac{1}{3}\cdot f(x) + \dfrac{2}{3}\cdot f(y)$.
в) Верно ли, что выпуклость функции вниз эквивалентна тому, что для любых $x, y \in M$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $\lambda > 0$, $\mu > 0$ и $\lambda + \mu = 1$, справедливо неравенство $f(\lambda x + \mu y) \leqslant \lambda f(x) + \mu f(y)$?

Задача 5. Пусть f — выпуклая вниз на связном множестве M функция. Для $x, y \in M$ определим среднюю скорость её изменения на отрезке $[x; y]$ как $v(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Сравните величины $v(a, b)$, $v(b, c)$ и $v(a, c)$ для точек $a, b, c \in M$, удовлетворяющих условию $a < b < c$.

Задача 6. Пусть функция f выпукла вниз на связном множестве M. Докажите, что:
а) f непрерывна на M, кроме, возможно, крайних точек;
б) f имеет в каждой точке M (кроме, возможно, крайних точек) левую и правую производные.

Задача 7. Докажите, что график выпуклой вниз на связном множестве дифференцируемой функции лежит не ниже любой своей касательной.

Задача 8. **а)** Докажите, что дифференцируемая на интервале функция выпукла вниз тогда и только тогда, когда её производная на этом интервале монотонно неубывает.
б) Докажите, что дважды дифференцируемая на интервале функция выпукла вниз тогда и только тогда, когда её вторая производная на этом интервале неотрицательна.

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой перегиба* графика функции f, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что f выпукла вниз на $\dot{U}^-_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0)$ и выпукла вверх на $\dot{U}^+_\varepsilon(x_0) = (x_0; x_0 + \varepsilon)$ (или наоборот).

Задача 9. **а)** (*Достаточное условие точки перегиба*) Если функция f дважды дифференцируема в окрестности точки x_0, вторая производная равна нулю в точке x_0 и меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка перегиба.
б) (*Необходимое условие точки перегиба*) Если x_0 — точка перегиба графика функции f и в этой точке функция имеет непрерывную вторую производную $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.

Задача 10. Найдите промежутки выпуклости вверх и вниз, а также точки перегиба функций:
а) x^n $(n \in \mathbb{N})$; **б)** x^{-n} $(n \in \mathbb{N})$; **в)** e^x; **г)** $\ln x$; **д)** $\sin x$; **е)** $\operatorname{tg} x$; **ж)** $\sqrt{|x|}$;
з) $5x^4 + 7x^3$; **и)** $\sin x + \cos x$; **к)** $(x(x-1))^{-1}$; **л)** $x^2 + \dfrac{1}{x}$; **м)*** $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Задача 11. Докажите, что выпуклая вниз функция, определённая на отрезке, достигает максимума в одном из концов этого отрезка. Где она достигает минимума?

Задача 12. **а)** Докажите, что если функция f определена на отрезке $[a; b]$ и для всех $x, y \in [a; b]$ выполнено первое неравенство задачи 4, то функция f удовлетворяет также и второму неравенству задачи 4.
б) Докажите, что если f к тому же и непрерывна, то она выпукла вниз.

1	2	3	4 а	4 б	4 в	5	6 а	6 б	7	8 а	8 б	9 а	9 б	10 а	10 б	10 в	10 г	10 д	10 е	10 ж	10 з	10 и	10 к	10 л	10 м	11	12 а	12 б

Задача 13. Пусть M — связно, $x_k \in M$ при всех k. Докажите, что для функции f, выпуклой вниз на M:
а) $f\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \leqslant \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$; **б)** $f\left(\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \leqslant \dfrac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$;
в) (*неравенство Йенсена*) если $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$, то $f\left(\dfrac{\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\right) \leqslant \dfrac{\alpha_1 f(x_1)+\cdots+\alpha_n f(x_n)}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$.

Задача 14. Пусть $x_1 > 0,\ \ldots,\ x_n > 0$. Докажите, что: **а)** $\dfrac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n} \geqslant \left(\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^2$;
б) $\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}$; **в)** $\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} \geqslant \dfrac{n}{x_1^{-1}+\ldots+x_n^{-1}}$.
г) В каких случаях в указанных выше неравенствах достигается равенство?

Задача 15. **а)** Докажите, что любое треугольное сечение тетраэдра по площади не превосходит одной из граней.
б) Верно ли аналогичное утверждение для четырёхугольных сечений тетраэдра?

Задача 16. **а)** Докажите, что среди треугольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.
б) Докажите аналогичное утверждение для n-угольников.

Задача 17. Найдите наибольшее значение объёма тетраэдра, который умещается в коробку $3\times4\times5$.

Задача 18. Углы α, β, γ лежат соответственно против сторон a, b, c данного треугольника. Докажите, что

$$60^\circ \leqslant \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} \leqslant 90^\circ.$$

Задача 19. (*неравенство Коши-Буняковского*) **а)** Докажите, что $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$.
б) При каких условиях достигается равенство? **в)** Каков геометрический смысл неравенства?

Задача 20. (*неравенство треугольника*) **а)** Докажите, что $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$.
б) При каких условиях достигается равенство? **в)** Каков геометрический смысл неравенства?

Задача 21*. (*неравенство Юнга*) **а)** Пусть $x, y \geqslant 0$ $p, q > 1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Докажите, что $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$.
б) При каких условиях достигается равенство?

Задача 22*. (*неравенство Гёльдера*) Пусть $p, q > 1$, причём $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Докажите, что для любых положительных чисел $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ выполнено

$$x_1y_1+\ldots+x_ny_n \leqslant (x_1^p+\ldots+x_n^p)^{1/p}\cdot(y_1^q+\ldots+y_n^q)^{1/q}.$$

Задача 23*. (*неравенство Минковского*) Докажите, что если $p > 1$, то для любых положительных чисел $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ выполнено

$$((x_1+y_1)^p+\ldots+(x_n+y_n)^p)^{1/p} \leqslant (x_1^p+\ldots+x_n^p)^{1/p}\cdot(y_1^p+\ldots+y_n^p)^{1/p}.$$

13 а	13 б	13 в	14 а	14 б	14 в	14 г	15 а	15 б	16 а	16 б	17	18	19 а	19 б	19 в	20 а	20 б	20 в	21 а	21 б	22	23