Листок №14 Последовательности 10.2015

Последовательности

Определение 1. *Последовательностью* называется произвольное отображение вида $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Числа $x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots$ называются *членами* или *элементами* последовательности x и обозначаются $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Сама последовательность обозначается (x_n).

Замечание. Вообще говоря, здесь мы определили последовательности действительных чисел. Можно рассматривать также и последовательности элементов произвольного множества M, определяя их как отображения $x\colon \mathbb{N} \to M$.

Определение 2. Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если найдётся такое число C, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $x_n < C$.

Формально: $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ x_n < C$.

Задача 1°. **а)** Дайте определение последовательности, ограниченной снизу.
б) Дайте определение ограниченной последовательности.
в) Сформулируйте без отрицания (в т.ч. на языке кванторов) следующее утверждение: «Последовательность не является ограниченной (сверху, снизу)».

Задача 2. Какие из следующих последовательностей являются ограниченными:
а) $x_n = n^5 - n^2 + 3$; **б)** $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$; **в)** $x_n = \sqrt[n]{n}$; **г)** $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$;
д)° $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^k} + \ldots + \dfrac{1}{n^k}$ $(k \in \mathbb{N})$; **е)°** $x_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ $(q \in \mathbb{R})$; **ж)*** $x_n = \sqrt[n]{n!}$?

Задача 3. Придумайте ограниченную последовательность, у которой
а) есть и наибольший, и наименьший члены;
б) есть наибольший член, но нет наименьшего члена;
в) есть наименьший член, но нет наибольшего члена;
г) нет ни наименьшего, ни наибольшего члена.

Задача 4. Найдите наибольшие члены следующих последовательностей:
а) $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$; **б)** $x_n = 3 + 7n - n^2$; **в)** $x_n = \dfrac{n}{50 + n^2}$; **г)** $x_n = \dfrac{2015^n}{n!}$.

Определение 3. Последовательность (x_n) называется *возрастающей*, если при всех натуральных n выполнено неравенство $x_n < x_{n+1}$.

Формально: $\forall n \in \mathbb{N}:\ x_n < x_{n+1}$.

Задача 5°. **а)** Сформулируйте без отрицания (в т.ч. на языке кванторов) следующее утверждение: «Последовательность не является возрастающей».
б) Дайте определения убывающей, невозрастающей, неубывающей последовательностей.

Определение 4. Последовательность называется *монотонной*, если она является либо возрастающей, либо убывающей, либо невозрастающей, либо неубывающей.

Задача 6. Какие из следующих последовательностей являются монотонными:
а) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; **б)** $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$; **в)** $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; **г)** $x_n = \sqrt[n]{n}$?

Определение 5. Последовательность (y_k) называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n), если существует возрастающая последовательность натуральных чисел (n_k) такая, что $y_k = x_{n_k}$.

Задача 7. Докажите, что любая подпоследовательность ограниченной (монотонной) последовательности является ограниченной (монотонной).

1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	2 е	2 ж	3 а	3 б	3 в	3 г	4 а	4 б	4 в	4 г	5 а	5 б	6 а	6 б	6 в	6 г	7

Задача 8. **а)** Придумайте такие две различные последовательности, чтобы первая являлась подпоследовательностью второй, а вторая — подпоследовательностью первой.
б)* Придумайте такую последовательность натуральных чисел, чтобы каждая последовательность натуральных чисел являлась её подпоследовательностью.

Определение 6. *Суммой* последовательностей (x_n) и (y_n) называется последовательность (z_n), задаваемая соотношением $z_n = x_n + y_n$ при каждом натуральном n. Аналогично определяются *разность*, *произведение* и (когда $y_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$) *отношение* двух последовательностей.

Задача 9. Верно ли, что если последовательности (x_n) и (y_n) являются ограниченными, то этим же свойством обладает их **а)** сумма; **б)** разность; **в)** произведение; **г)** отношение?

Задача 10. Верно ли, что если последовательности (x_n) и (y_n) являются монотонными, то этим же свойством обладает их **а)** сумма; **б)** разность; **в)** произведение; **г)** отношение?

Определение 7. Последовательность (x_n) называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа ε (э́псилон) при $n \gg 0$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

Формально: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} \ \forall n > k : \ |x_n| < \varepsilon$.

Задача 11. Докажите, что следующие последовательности являются бесконечно малыми (то есть для каждой последовательности (x_n) по заданному положительному числу ε найдите какой-нибудь номер k, начиная с которого выполнено неравенство $|x_n| < \varepsilon$):
а) $x_n = \dfrac{1}{n}$; **б)** $x_n = \dfrac{14}{n^3}$; **в)** $x_n = \dfrac{3n^4}{17 \cdot 2^n}$; **г)** $x_n = \dfrac{1}{2n^2 + 3n - 1}$; **д)** $x_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$.

Задача 12. Верно ли, что бесконечно малая последовательность является ограниченной?

Задача 13. Пусть (x_n) и (y_n) — бесконечно малые последовательности. Верно ли, что последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$ тоже является бесконечно малой?

Задача 14°. Докажите, что сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми последовательностями.

Задача 15°. Пусть (x_n) — бесконечно малая, а (y_n) — ограниченная последовательность. Докажите, что $(x_n + y_n)$ — ограниченная, а $(x_n y_n)$ — бесконечно малая последовательность.

Задача 16. В бесконечно малой последовательности (x_n) переставили члены и получили последовательность (y_n) (это означает, что $y_n = x_{f(n)}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ для некоторого взаимно однозначного отображения $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$). Обязательно ли (y_n) — бесконечно малая последовательность?

Задача 17*. Любую ли последовательность можно представить как отношение
а) двух ограниченных; **б)** двух бесконечно малых последовательностей?

Задача 18*. Пусть x_n для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначает сумму чисел вида $1/k$, где $k \in \mathbb{N} \cap [1; n]$, причём в десятичной записи числа k нет цифры 9. Является ли последовательность (x_n) ограниченной?

Задача 19*. Докажите, что у любой последовательности найдётся монотонная подпоследовательность.

8 а	8 б	9 а	9 б	9 в	9 г	10 а	10 б	10 в	10 г	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	12	13	14	15	16	17 а	17 б	18	19