Предполагается, что все множества, встречающиеся в этом листке, являются подмножествами поля действительных чисел $\mathbb{R}$. Для удобства множество $\mathbb{R}$ отождествляется с числовой прямой.

Определение 1. *Окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}$ называется любой интервал с серединой в этой точке: $(a-r, a+r)$, $r > 0$. Число r называется *радиусом* окрестности.

Определение 2. Точка $a \in M$ называется *внутренней точкой* множества M, если существует окрестность точки a, целиком принадлежащая множеству M.

Определение 3. Множество называется *открытым,* если все его точки внутренние.

Задача 1. Какие из следующих множеств открыты:
а) (a, b); **б)** $[a; b]$; **в)** $\mathbb{R}$; **г)** $(a, +\infty)$; **д)** $(-\infty, b]$; **е)** $\mathbb{Q}$; **ж)** $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Задача 2. Докажите, что
а) пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество;
б) объединение любого набора открытых множеств есть открытое множество;
в) пересечение любого набора открытых множеств не всегда является открытым множеством.

Определение 4. Точка a называется *предельной точкой* множества M, если любая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от a.

Определение 5. Точка a называется *предельной точкой* множества M, если любая окрестность точки a содержит бесконечно много точек из множества M.

Задача 3. Докажите, что определения 4 и 5 эквивалентны.

Определение 6. Множество, содержащее все свои предельные точки, называется *замкнутым.*

Задача 4. Какие множества из задачи 1 замкнуты?

Задача 5. Докажите, что всякое бесконечное ограниченное множество имеет хотя бы одну предельную точку. Всегда ли эта предельная точка принадлежит самому множеству?

Задача 6. Докажите, что
а) объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
б) пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто;
в) объединение любого набора замкнутых множеств не всегда замкнуто;
г) любое конечное множество замкнуто.

Задача 7. Докажите, что множество M замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \setminus M$ открыто.

Определение 7. Множество предельных точек множества M называется *производным множеством* и обозначается M'. Объединение $\overline{M} = M \cup M'$ называется *замыканием* множества M.

Задача 8. Всегда ли замкнуты следующие множества: **а)** M'; **б)** $\overline{M}$?

Задача 9. Докажите, что $\overline{M}$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M.

Задача 10. Докажите, что: **а)** если $M \subset N$, то $\overline{M} \subset \overline{N}$; **б)** $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$; **в)** $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

1 а	1 б	1 в	1 г	1 д	1 е	1 ж	2 а	2 б	2 в	3	4	5	6 а	6 б	6 в	6 г	7	8 а	8 б	9	10 а	10 б	10 в

Определение 8. Множество M называется 1) *плотным в себе,* если $M \subset M'$; 2) *совершенным,* если $M = M'$; 3) *всюду плотным,* если $M' = \mathbb{R}$.

Задача 11. Какие множества из задачи 1 **а)** плотны в себе; **б)** совершенны; **в)** всюду плотны?

Задача 12. Докажите, что множество является плотным в себе тогда и только тогда, когда оно не содержит изолированных точек.

Задача 13. Докажите, что множество совершенно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и плотно в себе.

Определение 9. *Покрытием множества* M называется система множеств A_α такая, что $M \subset \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$. Если все A_α суть открытые множества, то покрытие называется *открытым.*

Определение 10. Множество называется *компактным,* если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 14. Может ли счётное множество быть компактным?

Задача 15. Докажите, что пересечение замкнутого множества и компактного является компактным.

Задача 16. Докажите, что любое счётное подмножество компакта имеет предельную точку. Может ли эта точка не принадлежать компакту?

Задача 17. Докажите, что множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Задача 18*. (*Принцип вложенных компактов*) Пусть $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots \supseteq K_n \supseteq \ldots$ — последовательность непустых вложенных компактов. Докажите, что пересечение $\bigcap\limits_n K_n$ не пусто.

Определение 11. Разделим отрезок $[0, 1]$ на три равные части и удалим средний интервал $(1/3, 2/3)$. Каждый из оставшихся отрезков $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ разделим на три равные части и удалим средние интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$. С каждым из оставшихся отрезков проделаем точно такую же операцию и так далее до бесконечности. Оставшееся подмножество отрезка $[0, 1]$ называется *канторовым совершенным множеством.*

Задача 19. Является ли канторово совершенное множество счётным или континуальным?

Задача 20. Является ли канторово совершенное множество
а) открытым; **б)** замкнутым; **в)** плотным в себе; **г)** совершенным; **д)** компактным?

Определение 12. Множество M называется *связным,* если из того, что M принадлежит объединению двух открытых непересекающихся множеств следует, что оно принадлежит одному из этих множеств.

Задача 21. Докажите, что отрезок $[a; b]$ — связное множество.

Задача 22. Докажите, что любое открытое множество есть либо $\mathbb{R}$, либо объединение не более, чем счётного числа попарно непересекающихся интервалов и открытых лучей.

Задача 23. Опишите все множества, которые открыты и замкнуты одновременно.

Задача 24. Опишите все связные множества на прямой.

Задача 25*. Может ли совершенное множество быть счётным?

11 а	11 б	11 в	12	13	14	15	16	17	18	19	20 а	20 б	20 в	20 г	20 д	21	22	23	24	25