Листок №9д **Графы — 2** 11.2015

Определение 1. Вершина V графа G называется висячей, если $\deg V = 1$.

Задача 1. **а)** Все вершины графа являются висячими. Сколько у графа вершин?
б) Сколько висячих вершин может иметь дерево с n вершинами?

Определение 2. Граф O называется *остовом* связного графа G, если O имеет те же вершины, что и граф G, получается из G удалением некоторых рёбер и является деревом.

Задача 2. Верно ли, что всякий связный граф имеет остов? Может ли граф иметь несколько остовов?

Задача 3. Квадрат 8×8 разделили на 64 клеточки спичками длины 1. Какое наименьшее число спичек нужно убрать, чтобы из любой клеточки можно было попасть в любую другую, не перепрыгивая через спички?

Задача 4. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Определение 3. *Плоским графом* называется граф, рёбра которого не пересекаются нигде, кроме вершин. Такой граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа.

Задача 5. Изобразите плоский граф, у которого **а)** 6 вершин, степень каждой из которых равна 3; **б)** 6 вершин, степень каждой из которых равна 4; **в)** 8 вершин, степень каждой из которых равна 4.

Задача 6. Докажите, что связный плоский граф является эйлеровым если и только если его грани можно раскрасить в два цвета так, чтобы грани с общим ребром были разного цвета.

Задача 7. (*Формула Эйлера*) Докажите, что для каждого связного плоского графа с V вершинами, E рёбрами и F гранями имеет место равенство: $V - E + F = 2$.

Задача 8. Докажите формулу Эйлера для произвольного выпуклого многогранника.

Задача 9. Дан выпуклый многогранник, грани которого являются n-угольниками, и в каждой вершине сходится k граней. Докажите, что $1/n + 1/k = 1/2 + 1/r$, где r — число его рёбер.

Задача 10. Выпуклый многогранник называют *правильным,* если все его грани являются правильными n-угольниками, и в каждой его вершине сходится k граней. Докажите, что любой правильный многогранник — либо тетраэдр, либо куб, либо октаэдр, либо додекаэдр, либо икосаэдр.

Задача 11. Для каких $n \in \mathbb{N}$ полный граф с n вершинами является плоским?

Задача 12. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

Определение 4. Раскраска вершин графа G называется *правильной,* если никакие две вершины одного цвета не соединены ребром. Минимальное число цветов, в которые можно правильно раскрасить вершины графа G, называется его *хроматическим числом* (соответствующая раскраска называется *минимальной).* Обозначение: $\chi(G)$.

Задача 13. Верно ли, что равенство $\chi(G) = 2$ равносильно отсутствию в G циклов нечётной длины?

Задача 14. Найдите хроматическое число графа Петерсена (рис. 1).

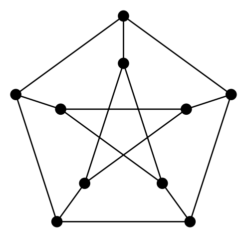

Рис. 1.

Задача 15. Пусть G простой плоский граф. Докажите, что
а) в графе G есть вершина, степень которой меньше 6;
б) вершины графа G можно правильно раскрасить в 5 или менее цветов.

Задача 16*. Верно ли, что если $\chi(G) = k$, то для минимальной окраски графа G существует путь из k разноцветных вершин?

1 а	1 б	2	3	4	5 а	5 б	5 в	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 а	15 б	16

Задача 17. В бесконечном графе каждые две вершины соединены ребром — либо красным, либо синим. Докажите, что можно выделить бесконечное число вершин, которые соединены друг с другом рёбрами одного цвета.

Задача 18. Докажите, что из любого бесконечного множества точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать

а) 4 точки, лежащие в вершинах выпуклого четырёхугольника;

б)* n точек, лежащих в вершинах выпуклого n-угольника.

Задача 19*. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Двое играют в такую игру: они по очереди соединяют какие-то две ещё не соединённые точки отрезком так, чтобы отрезки не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 20*. В лесу $k \cdot l$ тропинок и некоторое количество полянок. Каждая тропинка соединяет две полянки. Известно, что тропинки можно раскрасить в l цветов так, чтобы к каждой полянке сходились тропинки разного цвета. Докажите, что это можно сделать, покрасив каждым цветом ровно k тропинок.

Задача 21*. В графе n вершин $A_1, \ldots, A_n$ и n рёбер $b_1, \ldots, b_n$. Известно, что любые две вершины A_i и A_j этого графа соединены ребром если и только если рёбра b_i и b_j выходят из одной вершины. Докажите, что степень каждой вершины равна двум.

Задача 22*. В гости ожидают m или n человек, где $(m, n) = 1$. На какое наименьшее число секторов надо разрезать круглый торт, чтобы из них можно было сложить как m, так и n одинаковых кусков?

Задача 23*. Сколько остовов имеет граф с вершинами $V_0, \ldots, V_n$ и $(2n-1)$ ребром, где вершина V_0 соединена рёбрами с остальными вершинами, и при $1 \leqslant i < n$ соединены ребром вершины V_i и V_{i+1}?

Задача 24*. (*Теорема Кели*) Докажите, что полный граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

17	18 а	18 б	19	20	21	22	23	24

Примечание. Говорят, что два графа G_1 и G_2 *изоморфны,* если существует взаимно однозначное отображение f из множества вершин первого графа во множество вершин второго графа, сохраняющее рёбра (то есть вершины u и v графа G_1 соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром вершины $f(u)$ и $f(v)$ графа G_2). Обычно графы изучают с точностью до изоморфизма, поскольку в практических задачах зачастую графы возникают без привязки к их изображению на плоскости, а большая часть важных свойств изоморфных графов совпадает. С этой точки зрения вопрос о том, является ли тот или иной граф плоским, правильно переформулировать таким образом: изоморфен ли данный граф некоторому плоскому графу (такие графы называют *планарными).* Именно так следует понимать, в частности, формулировку задачи 11.

Критерий планарности для графов даёт теорема Понтрягина-Куратовского, доказанная в 1927 году советским учёным Львом Семёновичем Понтря́гиным (1908-1988 гг.) и в 1930 году, независимо, польским математиком Казими́ром Курато́вским (1896-1980 гг.): граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 (полный граф на пяти вершинах) или $K_{3,3}$ (граф «домики-колодцы» из задачи 12). Поясним, что два графа называются *гомеоморфными,* если они оба могут быть получены из одного и того же графа «добавлением в его рёбра» новых вершин степени 2. Например, граф Петерсена, уже встречавшийся нам ранее, не является планарным, потому что обладает подграфом, гомеоморфным графу $K_{3,3}$ (рис. 2).

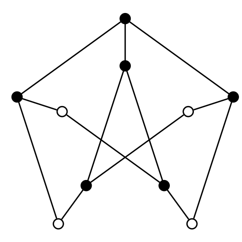

Рис. 2.