Листок №17 — **Предел последовательности — 2** — 01.2016

Определение 1. Число a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое натуральное $n > k$, что выполнено $|x_n - a| < \varepsilon$.

Формально: $\forall \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N},\, n > k:\ |x_n - a| < \varepsilon$.

Определение 2. Точка a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если любая окрестность точки a содержит бесконечно много элементов последовательности (x_n).

Задача 1. Докажите эквивалентность определений 1 и 2.

Задача 2. **а)** Докажите, что если последовательность имеет предел, то этот предел является предельной точкой, и других предельных точек нет.
б) Верно ли, что если последовательность имеет единственную предельную точку, то эта последовательность сходится?

Задача 3. Докажите, что:
а) всякая монотонная последовательность не может иметь более одной предельной точки;
б) всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.

Задача 4. Для следующих последовательностей укажите все их предельные точки:
а) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$; **б)** $x_n = (-1)^n$; **в)** $x_n = n$; **г)** $x_n = n^{(-1)^n}$; **д)** $\cos\dfrac{\pi n}{3} + \sin\dfrac{\pi n}{5}$.

Задача 5. Существует ли последовательность, множество предельных точек которой есть
а) $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$; **б)** $\mathbb{N}$; **в)** $\emptyset$; **г)** $[0, 1]$; **д)** $(0, 1)$; **е)** $\mathbb{Q}$; **ж)** $\mathbb{R}$?

Задача 6. Докажите, что если последовательность имеет предел a, то и любая её подпоследовательность также будет иметь предел a.

Задача 7. **а)** Докажите, что если a является предельной точкой последовательности, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к a.
б) Верно ли обратное утверждение?

Задача 8. Докажите, что из всякой неограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности.

Задача 9°. (*Теорема Больцано-Вейерштрасса*) Докажите, что из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Определение 3. Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых натуральных m и n, бóльших k, выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Формально: $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\, m, n > k:\ |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Задача 10°. (*Критерий Коши*) Докажите, что последовательность (x_n) сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Задача 11°. (*Теорема Вейерштрасса*) Докажите, что любая монотонная ограниченная последовательность сходится.

Задача 12. Докажите, что последовательность (x_n) сходится, и найдите её предел, если
а) $x_n = \dfrac{n}{2^n}$; **б)** $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$; **в)** $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\ldots$;
г) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, $\ldots$; **д)** $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

1	2 а	2 б	3 а	3 б	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	5 е	5 ж	6	7 а	7 б	8	9	10	11	12 а	12 б	12 в	12 г	12 д

Задача 13. (*Число e*) Пусть $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что:

а)$^\circ$ последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ сходится (её предел обозначают буквой e);

б)$^\circ$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$; **в)**$^\circ$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$; **г)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right) = e$.

Задача 14. Пусть $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, причём $a > 0$ и $x_1 > 0$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Задача 15*. Докажите, что в упорядоченном поле F аксиома о точной верхней грани эквивалентна
а) теореме Больцано-Вейерштрасса; **б)** критерию Коши и аксиоме Архимеда;
в) теореме Вейерштрасса.

Задача 16*. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Найдите пределы: **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\{\pi n\}}{n}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[\pi n]}{n}$;
в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$; **д)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;
е) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}$; **ж)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

Задача 17*. **а)** Докажите, что если последовательность (x_n) сходится, то последовательность средних арифметических $y_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$ также сходится, причём к тому же пределу.
б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для среднего геометрического.

Задача 18*. (*Теоремы Штольца*)
а) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ и (b_n) монотонно убывает. Докажите, что если последовательность $\left(\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right)$ сходится, то и последовательность $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ сходится, причём к тому же пределу.
б) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, причём (b_n) монотонно возрастает. Докажите, что если последовательность $\left(\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right)$ сходится, то и последовательность $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ сходится, причём к тому же пределу.
в) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, причём (b_n) монотонно возрастает. Докажите, что если выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right) = +\infty$, то справедливо также и равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = +\infty$.

13 а	13 б	13 в	13 г	14	15 а	15 б	15 в	16 а	16 б	16 в	16 г	16 д	16 е	16 ж	17 а	17 б	18 а	18 б	18 в

Примечание. Понятие предела последовательности в математическом анализе является ключевым. В определённом виде с ним работали ещё древние греки, хотя строгое определение было дано намного позже. Так, Евдокс Книдский (ок. 408 г. – ок. 355 г. до н.э.) разработал так называемый «метод исчерпывания» для вычисления площадей разных фигур, которым впоследствии успешно пользовались Евклид (ок. 325 г. – ок. 265 г. до н.э.) и Архимед (287-212 гг. до н.э). В знаменитых апориях Зенона Элейского (ок. 490 г. – ок. 430 г. до н.э.) понятие предела также неявно фигурирует.

Позднее всё большее и большее количество задач (в основном, физических) подтолкнуло человечество к исследованию бесконечных величин. Так появился новый раздел математики — математический анализ, и вместе с ним понятие предела. У его истоков стояли двое великих учёных, независимо друг от друга разработавшие теорию дифференциального и интегрального исчисления, в пучину которой мы с вами начинаем погружаться: Исаáк Ньютон (1642-1727 гг.) и Гóтфрид Вúльгельм Лéйбниц (1646-1716 гг.). А определение предела в современном виде дали Бернáрд Больцáно (1781-1848 гг.) и Карл Тéодор Вильгéльм Вéйерштрасс (1815-1897 гг.).