Определение 1. Правило f, сопоставляющее каждому элементу x множества X ровно один элемент y множества Y, называется *отображением из множества X в множество Y*. Если Y является числовым множеством, то отображение называют *функцией*. Обозначения: $f : X \to Y,\ f(x) = y,\ x \mapsto y$.

Отображения можно задавать картинкой. Например, отображение f из множества $\{7, 9, 11\}$ в множество $\{0, 1\}$, для которого $f(7) = 0$, $f(9) = 0$, $f(11) = 1$, можно изобразить так, как показано на рис. 1.

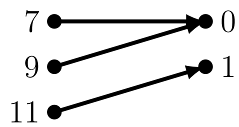
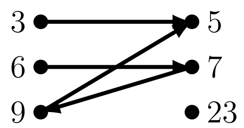
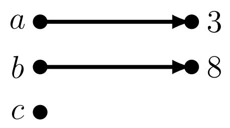
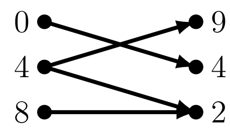


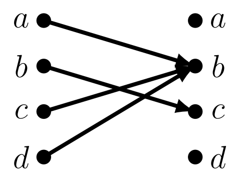
Рис. 1. Отображение.

Задача 1. Какие из следующих картинок определяют отображения?









Определение 2. *Графиком* отображения $f : X \to Y$ называется множество $\Gamma(f) \subset X \times Y$, состоящее из всех пар вида $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Точно так же, как и отображения, графики имеют наглядную интерпретацию. Так, например, график $\{(1, a), (2, b), (3, a), (4, c)\}$, соответствующий отображению $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$, изображён на рис. 2.

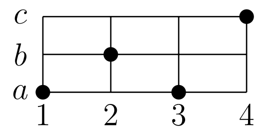
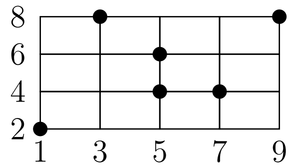
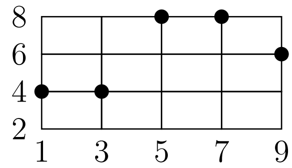
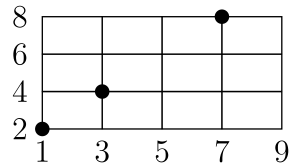


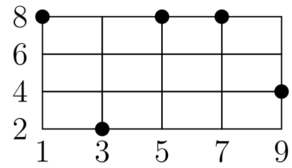
Рис. 2. График.

Задача 2. Какие из приведённых ниже картинок соответствуют графикам отображений?





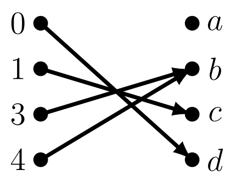


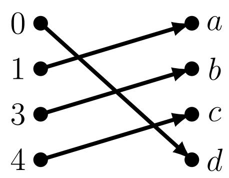


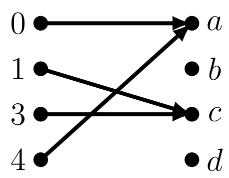
Задача 3. Нарисуйте всевозможные отображения из множества $\{a, b, c\}$ в множество $\{0, 1\}$, а также соответствующие им графики.

Определение 3. Пусть дано отображение $f : X \to Y$. Если $f(x) = y$, то y называется *образом элемента x*, x — *прообразом элемента y*. Множество, состоящее из всех элементов x таких, что $f(x) = y$, называется *полным прообразом элемента y* при отображении f (обозначение: $f^{-1}(y)$). *Образом множества $A \subset X$* при отображении f называется множество, состоящее из всех элементов вида $f(x)$, где $x \in A$ (обозначение: $f(A)$). *Прообразом множества $B \subset Y$* называется множество, состоящее из всех таких x, что $f(x) \in B$ (обозначение: $f^{-1}(B)$).

Задача 4. Для каждого из указанных ниже отображений $f : \{0, 1, 3, 4\} \to \{a, b, c, d\}$ найдите $f(\{0, 3\})$, $f(\{1, 3, 4\})$, $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(\{a, b\})$, $f^{-1}(\{b, d\})$.

а)


б)


в)


Задача 5. Пусть $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$. Обязательно ли верно ли, что: **а)** $f(X) = Y$; **б)** $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; **в)** $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$; **г)** $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$; **д)** если $A_1 \subset A_2$, то $f(A_1) \subset f(A_2)$; **е)** если $f(A_1) \subset f(A_2)$, то $A_1 \subset A_2$; **ж)** $f^{-1}(f(A_1)) = A_1$?

Задача 6. Пусть $f : X \to Y$, $B_1, B_2 \subset Y$. Обязательно ли верно, что: **а)** $f^{-1}(Y) = X$; **б)** $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; **в)** $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$; **г)** $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$; **д)** если $B_1 \subset B_2$, то $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$; **е)** если $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$, то $B_1 \subset B_2$; **ж)** $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$?

1	2	3	4 а	4 б	4 в	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	5 е	5 ж	6 а	6 б	6 в	6 г	6 д	6 е	6 ж

Определение 4. Отображение $f : X \to Y$ называется *взаимно однозначным*, если для любого $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ состоит ровно из одного элемента.

Задача 7. Пусть $X = \{2, 5, 7\}$, $Y = \{7, 32, 73\}$. Нарисуйте всевозможные взаимно однозначные отображения из множества X в множество Y, а также графики этих отображений.

Задача 8. Пусть множество X состоит из m элементов, а множество Y — из n элементов.
а) Сколько существует различных отображений из множества X в множество Y?
б) Как много среди этих отображений взаимно однозначных?

Задача 9. Верно ли, что если отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условиям $f(X) = Y$ и $f^{-1}(Y) = X$, то f — взаимно однозначное?

Определение 5. *Композицией отображений* $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ называется отображение $h : X \to Z$ такое, что $h(x) = g(f(x))$. Обозначение: $h = g \circ f$.

Задача 10. Докажите, что $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ для любых трёх отображений $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ и $h : Z \to W$.

Задача 11. Отображения $f : \{1, 2, 3, 5\} \to \{0, 1, 2\}$, $g : \{0, 1, 2\} \to \{3, 7, 8, 9\}$, $h : \{3, 7, 8, 9\} \to \{1, 2, 3, 5\}$ изображены на рис. 3. Нарисуйте картинки для следующих отображений: **а)** $g \circ f$; **б)** $f \circ g$; **в)** $f \circ h$; **г)** $h \circ g \circ f$; **д)** $f \circ h \circ g$; **е)** $g \circ h \circ f$; **ж)** $f \circ h \circ g \circ f$; **з)** $g \circ f \circ h \circ g$.

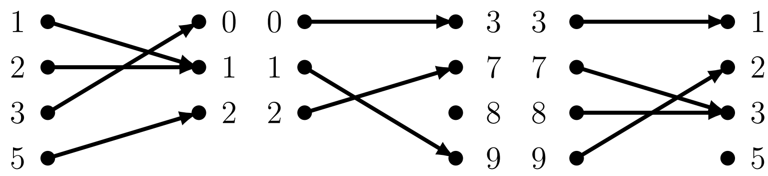
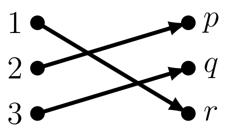
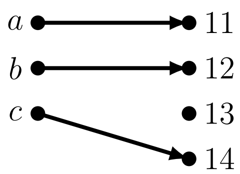
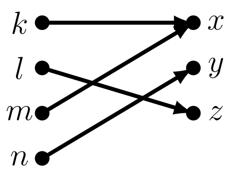
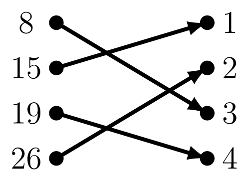


Рис. 3.

Определение 6. Отображение $f : X \to X$ называется *тождественным*, если $f(x) = x$ для любого $x \in X$. Обозначение: id_X.

Определение 7. Пусть дано отображение $f : X \to Y$. Отображение $g : Y \to X$ называется *обратным* к отображению f (обозначение: $g = f^{-1}$), если отображения $g \circ f$ и $f \circ g$ тождественны ($g \circ f = \mathrm{id}_X$ и $f \circ g = \mathrm{id}_Y$). Отображение f, для которого существует обратное отображение, называется *обратимым.*

Задача 12. Выясните, какие из следующих отображений обратимы. Нарисуйте картинки для обратных к ним отображений и соответствующих им графиков.

а)  **б)**  **в)**  **г)** 

Задача 13. Пусть для отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ отображение $f \circ g$ тождественно. Верно ли, что $g = f^{-1}$?

Задача 14. Докажите, что отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно.

Задача 15*. Обозначим через $t : X \times Y \to Y \times X$ такое отображение, что $t(x, y) = (y, x)$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ обратимо тогда и только тогда, когда $t(\Gamma(f)) \subset Y \times X$ есть график некоторого отображения $g : Y \to X$. Верно ли, что в этом случае $g = f^{-1}$?

Задача 16*. Пусть n — фиксированное натуральное число, отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ставит в соответствие каждому $k \in \mathbb{N}$ число

$$f(k) = \begin{cases} n - k, & \text{если} \quad k < n, \\ n + k, & \text{если} \quad k \geqslant n, \end{cases}$$

Верно ли, что при отображении f различные элементы $\mathbb{N}$ имеют различные образы? Найдите образ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Задача 17*. Каждому треугольнику T, длины сторон которого суть a, b и c, сопоставим треугольник T', стороны которого имеют длины $(a+b)/2$, $(b+c)/2$ и $(c+a)/2$. Рассмотрим отображение множества всех треугольников в себя, которое ставит в соответствие треугольнику T треугольник T'. Верно ли, что при этом отображении различным треугольникам T соответствуют различные треугольники T'? Верно ли, что каждый треугольник является образом какого-нибудь треугольника? Какие треугольники являются *неподвижными элементами* этого отображения (то есть соответствуют сами себе)?

7	8 а	8 б	9	10	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	11 е	11 ж	11 з	12 а	12 б	12 в	12 г	13	14	15	16	17