Листок №1д Инвариант 09.2014

Определение 1. *Инвариантом* некоторого преобразования (или системы действий) называется величина (или свойство), остающаяся неизменной при этом преобразовании.

Если инвариант различает два положения, то от одного из них нельзя перейти к другому. В качестве инварианта может использоваться чётность, остаток от деления на какое-либо число, раскраска, алгебраическое выражение и т.п. Наиболее простым и часто используемым инвариантом является чётность некоторой величины.

Задача 1. Кузнечик умеет прыгать по прямой влево и вправо. Может ли он через 57 прыжков оказаться в исходной точке, если **а)** каждый раз кузнечик прыгает на 1 см;
б) первый раз кузнечик прыгает на 1 см, второй — на 3 см, третий — на 5 см и т.д.;
в) первый раз кузнечик прыгает на 1 см, второй — на 2 см, третий — на 3 см и т.д.?

Задача 2. Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограммы?

Задача 3. Можно ли доску 8×8 разрезать на доминошки (т.е. на кусочки 2×1), если из доски вырезали **а)** левую нижнюю клетку; **б)** правую нижнюю и левую нижнюю клетки; **в)** правую верхнюю и левую нижнюю клетки?

Задача 4. На поверхности куба проведена замкнутая восьмизвенная ломаная, вершины которой совпадают с вершинами куба. Какое наименьшее количество звеньев этой ломаной может совпасть с рёбрами куба?

Задача 5. Есть 77 брусков $3\times 3\times 1$. Можно ли из них сложить брусок $7\times 9\times 11$?

Задача 6. У числа 8^n вычисляют сумму цифр, затем у получившегося числа снова вычисляют сумму цифр и так далее, пока процесс не остановится. Какое число получится, если $n = 2014$?

Задача 7. **а)** На столе гербом вверх лежит 30 монет. За один ход разрешается перевернуть любые 29 из них. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все монеты лежали гербом вниз? **б)** А если монет 15, а переворачивать можно 14 монет за ход? **в)** А если монет m, а переворачивать можно n монет за ход?

Задача 8. В трёх вершинах квадрата сидят кузнечики. Каждый кузнечик может прыгнуть в точку, симметричную относительно текущего расположения другого кузнечика. Может ли после нескольких таких прыжков выйти так, что один из кузнечиков окажется в четвёртой вершине исходного квадрата?

Задача 9. Каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно либо 1, либо -1. При этом $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots+a_{n-1}a_n+a_na_1 = 0$. Докажите, что n делится на 4.

Определение 2. *Полуинвариантом* некоторого преобразования (или системы действий) называется величина, которая при каждом таком преобразовании (операции) возрастает (убывает).

Задача 10. **а)** На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 20$. За одну операцию можно стереть любые два числа a и b и написать вместо них $a + b - 1$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?
б) А если вместо чисел a и b надо записывать $ab + b + a$?

Задача 11. Мистер Х вышел из города A в самый удаленный от A город B. Из города B он отправился в самый удаленный от B город C и так далее. Известно, что все расстояния между городами различны и C не совпадает с A. Докажите, что мистер Х никогда не вернется в A.

Задача 12. На доске написано число $1234567891011\ldots 1000$. За одну операцию разрешается умножить его на любую цифру (кроме нуля), а потом из произведения вычеркнуть все единицы. Какое наименьшее число можно получить таким образом?

Задача 13. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 2014$. За одну операцию можно стереть любые два числа a и b и вместо них написать остаток от деления на 7 числа $a + b$. После проведения нескольких таких операций на доске остались числа x и 987. Найдите число x.

Задача 14. Можно ли прямоугольник $2n\times 2m$ покрыть $mn - 1$ квадратиками 2×2 и одной полоской 1×4?

Задача 15. Можно ли доску 10×10 замостить без пробелов и наложений **а)** плитками размера 1×4; **б)** фигурками из четырёх клеток в форме буквы «Г»?

Задача 16. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек переместить вторую ножку в другой узел клетчатой бумаги. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

1 а	1 б	1 в	2	3 а	3 б	3 в	4	5	6	7 а	7 б	7 в	8	9	10 а	10 б	11	12	13	14	15 а	15 б	16