Развлечения на бесконечности

Задача 1. Верно ли, что из натурального ряда можно выделить
а) бесконечно длинную цепочку подряд идущих составных чисел;
б) сколь угодно длинную цепочку подряд идущих составных чисел?

Задача 2. Можно ли из последовательности $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ выделить
а) бесконечно длинную арифметическую прогрессию;
б) сколь угодно длинную арифметическую прогрессию?

Задача 3. Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что любая другая последовательность натуральных чисел получается из неё
а) вычёркиванием некоторых членов; **б)** вычёркиванием конечного числа членов?

Задача 4. Клетки бесконечной клетчатой плоскости раскрашены в два цвета. Обязательно ли найдётся бесконечное множество вертикалей и бесконечное множество горизонталей, на пересечении которых все клетки будут одного цвета?

Задача 5. Можно ли расставить во все клетки бесконечной клетчатой плоскости все натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз и чтобы любые два числа из одной строки или одного столбца были взаимно простыми?

Задача 6. Можно ли покрыть
а) прямую конечным числом кругов;
б) плоскость конечным числом полос;
в) плоскость конечным числом внутренностей углов, сумма которых меньше $360°$;
г) тот же вопрос, что и в предыдущем пункте, но разрешается использовать бесконечное число углов;
д) плоскость конечным числом внутренностей парабол?

Задача 7. Докажите, что из любых одиннадцати бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

Задача 8. **а)** Дано три последовательности натуральных чисел: (a_n), (b_n) и (c_n). Докажите, что найдутся такие номера p и q, что $a_p \geqslant a_q$, $b_p \geqslant b_q$, $c_p \geqslant c_q$.
б) Останется ли верным утверждение задачи, если последовательностей счётное число?

Задача 9. Дан язык с конечным алфавитом. Словом в этом языке называется любая последовательность букв из алфавита этого языка. Часть слов (конечной длины) в языке является неприличными. Известно, что существуют сколь угодно длинные приличные слова (т.е. слова, не содержащие неприличных подслов). Докажите, что существует бесконечно длинное приличное слово.

Задача 10. **а)** Докажите, что в любой бесконечной последовательности натуральных чисел можно вычеркнуть некоторые члены так, что останется либо бесконечная неубывающая, либо бесконечная невозрастающая последовательность.
б) Докажите этот же факт для произвольной последовательности действительных чисел.

Задача 11. Докажите, что существует такое подмножество $M \subset \mathbb{N}$, что каждое натуральное число представляется единственным образом в виде разности двух чисел из M.

Задача 12. Тор и Один по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Тор каждым своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, Один — одну. Если в итоге получится периодическая дробь, выигрывает Тор, иначе — Один. Кто выиграет при правильной игре?

1 а	1 б	2 а	2 б	3 а	3 б	4	5	6 а	6 б	6 в	6 г	6 д	7	8 а	8 б	9	10 а	10 б	11	12

Задача 13. Игра происходит на бесконечной плоскости. Играют двое: один передвигает одну фишку-волка, другой — несколько фишек-овец. После хода волка ходит какая-нибудь из овец, затем после следующего хода волка — опять какая-нибудь из овец, и так далее. И волк и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более, чем на один метр. Верно ли, что для любого числа овец существует такая начальная позиция, что волк не поймает ни одной овцы?

Задача 14. Бандит угнал из участка старую полицейскую машину и умчался на ней по дороге в неизвестном направлении. Через некоторое время пропажи хватились, и в погоню на более новой машине отправился полицейский. Дорога представляет собой бесконечную прямую, скорость машины полицейского больше скорости машины бандита, сколько времени прошло между выездом бандита и полицейского из участка — неизвестно. Может ли полицейский гарантированно догнать бандита?

Задача 15. Город представляет собой бесконечную клетчатую плоскость (линии — улицы, клеточки — кварталы). На одной из улиц через каждые 100 кварталов на перекрёстках стоит по милиционеру. Где-то в городе есть бандит (местонахождение бандита неизвестно, но перемещается он только по улицам). Цель милиции — увидеть бандита. Есть ли у милиции способ (алгоритм) наверняка достигнуть своей цели? Известно, что максимальные скорости милиции и бандита — какие-то конечные, но неизвестные нам величины (у бандита скорость может быть больше, чем у милиции). Милиция видит вдоль улиц во все стороны на любое расстояние.

Задача 16*. В таком же городе, как и в предыдущей задаче, трое полицейских пытаются поймать вора (местонахождение вора неизвестно, но перемещается он только по улицам). Максимальные скорости у полицейских и вора одинаковы. Вор считается пойманным, если он оказался на одной улице с полицейским. Смогут ли полицейские поймать вора?

Задача 17. У Васи и Пети есть набор синих шариков и два набора красных шариков: маленькие и большие. В каждом из трех наборов бесконечно много шариков, занумерованных числами из множества M, причём каждый шарик больше предыдущего по номеру, и каждый большой шарик больше любого маленького.

Мальчики играет в игру по следующим правилам. Для начала Вася выбирает, сколько ходов будет продолжаться игра. После этого он выбирает один из шариков (любого цвета). В ответ Петя должен выбрать ему пару среди шариков другого цвета. Эти действия повторяются выбранное число раз. Заметьте, что Васе не обязательно каждый ход выбирать шарики одного цвета.

В результате совместными усилиями будет выбрано несколько пар шариков, состоящих каждая из красного и синего шариков. Эти пары упорядочиваются так, чтобы красные шарики шли по возрастанию размера. Если синие шарики при этом тоже будут идти по возрастанию, то победил Петя; в противном случае победа присуждается Васе.

Кто победит при оптимальной игре обеих сторон, если **а)** $M = \mathbb{N}$; **б)** $M = \mathbb{Z}$?

13	14	15	16	17 а	17 б

Примечание. Бесконечные объекты регулярно встречаются нам в повседневной жизни, а потому велик соблазн оперировать с ними точно так же, как мы это делаем с объектами конечными. Однако здесь необходима определённая осторожность, что было замечено ещё древними греками. Так, знаменитая апория Зенона Элейского (ок. 490 г. до н.э. – ок. 425 г. до н.э.) «Ахиллес и черепаха» гласит: «Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади неё на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползёт сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползёт ещё десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху».

С другой стороны, бояться бесконечности тоже не нужно, потому что её использование даёт дополнительные возможности. Нельзя не вспомнить, сколько пользы принесли нам математическая индукция и пределы последовательности и функции. В дальнейшем число таких примеров будет плодиться и множиться. И это хорошо.