Листок №3 **Теория множеств — 1** 10.2014

Пусть A — множество. Если x является элементом множества A, то пишут $x \in A$. Если же x не принадлежит множеству A, то записывают $x \notin A$. Иногда множество записывают, перечисляя в фигурных скобках через запятую его элементы. Так, $\{2, 5\}$ — множество, состоящее из элементов 2 и 5.

Для некоторых множеств есть стандартные обозначения. Например, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел. Многие множества можно задать при помощи условий. Скажем, множество всех чётных чисел записывается так: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ делится на } 2\}$.

Определение 1. Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Обозначение: $A = B$.

Определение 2. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A принадлежит также и множеству B. Обозначение: $A \subset B$.

Задача 1. Докажите, что для любых множеств A, B и C: **а)** $A \subset A$;
б) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$; **в)**$^\circ$ $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение 3. Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента. Обозначение: $\emptyset$.

Задача 2°. Докажите, что
а) пустое множество является подмножеством любого множества;
б) пустое множество единственно.

Задача 3. Для каждого из множеств $\{0\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, 3\}$ найдите количество его **а)** элементов; **б)** подмножеств.

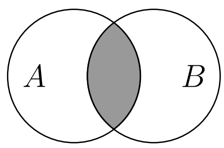
Задача 4*. Приведите пример такого множества из четырёх элементов, что для каждых двух его элементов один из них является элементом другого.

Задача 5. Может ли у множества быть ровно **а)** 0; **б)** 7; **в)** 16 подмножеств?

Задача 6*. Может ли у множества A быть ровно на 2014 подмножеств больше, чем у множества B?

Определение 4. *Объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A и B, то есть из всех таких x, что $x \in A$ или $x \in B$. Обозначение: $A \cup B$.

Определение 5. *Пересечением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам A и B, то есть из всех таких x, что $x \in A$ и $x \in B$. Обозначение: $A \cap B$.



Схематично изображать множества удобно с помощью *кругов Эйлера*. Так, на рисунке справа изображено пересечение множеств A и B.

Задача 7. Пусть $A = \{57, 91, 179, 239\}$, $B = \{91, 239, 2014\}$, $C = \{2, 57, 239, 2014\}$, $D = \{2, 91, 2014, 2017\}$. Найдите следующие множества: **а)** $A \cup B$;
б) $A \cap B$; **в)** $(A \cap B) \cup D$; **г)** $C \cap (D \cap B)$; **д)** $(A \cup B) \cap (C \cup D)$;
е) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$; **ж)** $(D \cup A) \cap (C \cup B)$; **з)** $(A \cap (B \cap C)) \cap D$;
и) $(A \cup (B \cap C)) \cap D$; **к)** $(C \cap A) \cup ((A \cup (C \cap D)) \cap B)$.

1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	3 а	3 б	4	5 а	5 б	5 в	6	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	7 е	7 ж	7 з	7 и	7 к

Задача 8. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполнены равенства:
а) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$; **б)** $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$;
в) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
г)$^\circ$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Определение 6. *Разностью* множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов x таких, что $x \in A$ и $x \notin B$. Обозначение: $A \backslash B$.

Задача 9. Для множеств A, B, C, D из задачи 7 найдите следующие множества:
а) $(A \cup B) \backslash (C \cap D)$; **б)** $(A \cup D) \backslash (B \cup C)$; **в)** $A \backslash (B \backslash (C \backslash D))$;
г) $D \backslash ((B \cup A) \backslash C)$; **д)** $((A \backslash (B \cup D)) \backslash C) \cup B$.

Задача 10°. Верно ли, что для любых множеств A, B, C: **а)** $(A \backslash B) \cup B = A$;
б) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$; **в)** $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$; **г)** $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;
д) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$; **е)** $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A \cup B$?

Определение 7. *Декартовым произведением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Обозначение: $A \times B$.

Задача 11. Из каких элементов состоят следующие множества: $\{0,1\} \times \{9\}$, $\{0,1\} \times \{0,1\}$, $\emptyset \times \emptyset$, $\{5,7\} \times \{1,3,17\}$, $\{16,41\} \times \emptyset$?

Задача 12°. Верно ли, что для всех множеств A, B, C, D выполняются равенства
а) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$; **б)** $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$?

Задача 13. (*Принцип включения-исключения*) Пусть $|M|$ обозначает количество элементов множества M, состоящего из конечного числа элементов.
а)$^\circ$ Докажите, что $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.
б)* Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для n множеств.

Задача 14*. На дереве 15 листьев. Докажите, что можно сорвать 8 из них так, что оставшиеся будут давать не менее 7/15 исходной тени.

Задача 15*. Сколько различных множеств можно получить из множеств A, B, C, D задачи 7 при помощи операций **а)** $\cup, \cap, \backslash$; **б)** $\cup, \cap$; **в)** $\cup, \backslash$; **г)** $\cap, \backslash$?

8 а	8 б	8 в	8 г	9 а	9 б	9 в	9 г	9 д	10 а	10 б	10 в	10 г	10 д	10 е	11	12 а	12 б	13 а	13 б	14	15 а	15 б	15 в	15 г

Примечание. Теория множеств появилась в конце XIX века, её основоположником по праву считается немецкий математик Ге́орг Ка́нтор (1845-1918 гг). Практически сразу же с момента своего возникновения она стала одним из важнейших разделов математики, и сейчас дальнейшее развитие науки без неё немыслимо. Особую роль теория множеств сыграла в вопросах обоснования математики. Впоследствии мы с вами немного затронем эту область; главным образом, исследуя природу действительных чисел.