Листок №2 **Математическая индукция** 09.2014

Определение 1. *Принцип математической индукции* есть свойство (аксиома) множества натуральных чисел, которое мы принимаем без доказательства. Заключается он в следующем. Пусть имеется последовательность утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ Допустим, дополнительно известно, что выполнены следующие условия:

1. утверждение A_1 истинно;
2. при всех k из истинности утверждения A_k следует истинность утверждения A_{k+1} $(A_k \Rightarrow A_{k+1})$.

Тогда верны все утверждения последовательности. Утверждение A_1 называется *базой* индукции, следствие $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ — *переходом* или *шагом* индукции, утверждение A_n — *предположением* индукции.

Задача 1. Докажите с помощью метода математической индукции, что
а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$; **б)** $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
в) если $q\neq 1$, то $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Задача 2. Найдите ошибку в следующем рассуждении.
«Для любого натурального n произвольные n точек плоскости лежат на одной прямой. База индукции, очевидно, верна (точка лежит на прямой). Предположив, что утверждение верно для $n=k$, докажем его для $n=k+1$. Возьмём произвольные $k+1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$. По предположению индукции точки $A_1, \ldots, A_k$ лежат на одной прямой и точки $A_2, \ldots, A_{k+1}$ лежат на одной прямой. Следовательно, все они лежат на единственной прямой, проходящей через точки $A_2, \ldots, A_k$.»

Задача 3. Докажите, что квадрат размера $2^n\times 2^n$ можно разрезать на «уголки» из трёх клеток, если из этого квадрата предварительно вырезать одну **а)** угловую клетку; **б)** произвольную клетку.

Задача 4. В колонию бактерий попал вирус. Каждую секунду каждый из вирусов уничтожает одну бактерию, удваиваясь при этом. Все оставшиеся в живых бактерии тоже удваиваются. Правда ли, что через некоторое время все бактерии погибнут?

Задача 5. Докажите, что **а)** $(n^3+5n)\,\vdots\,6$; **б)** $(2^{5n-2}+5^{n-1}\cdot 3^{n+1})\,\vdots\,17$; **в)** $\underbrace{111\ldots1}_{3^n}\,\vdots\,3^n$.

Задача 6. Последовательность чисел a_1, a_2, a_3, … такова, что
а) $a_1=2$ и $a_{n+1}=3a_n-2$. Докажите, что $a_n=3^{n-1}+1$;
б) $a_1=1$, $a_2=2$ и $a_{n+1}=a_n-a_{n-1}$ при $n>2$. Докажите, что $a_n=a_{n+6}$.

Задача 7. Докажите, что $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$ при $n>2$.

Задача 8°. (*Неравенство Бернулли*) Докажите, что $(1+a)^n\geqslant 1+na$ при $a>-1$.

Существуют разные варианты математической индукции. Иногда в качестве шага приходится проверять, что $(n+1)$-е утверждение истинно, если истинны *все* предыдущие (такая индукция называется *обобщённой).* Другой вариант: предположим, что не все утверждения истинны. Тогда существует *наименьшее* натуральное k, для которого k-е утверждение неверно. Если из этого выводится противоречие, то все утверждения истинны (такой вариант индукции носит название *принципа наименьшего элемента).*

Задача 9*. Докажите, что принцип математической индукции эквивалентен
а) обобщённому принципу математической индукции; **б)** принципу наименьшего элемента.

Замечание 1. В дальнейшем результатами задачи 9 можно пользоваться без доказательства.

1 а	1 б	1 в	2	3 а	3 б	4	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	7	8	9 а	9 б

Задача 10°. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких различных степеней двойки (возможно, включая нулевую степень).

Задача 11. Докажите, что если число $a + \frac{1}{a}$ — целое, то все числа вида $a^n + \frac{1}{a^n}$ — тоже целые.

Задача 12. *Прямыми общего положения* называется такой набор прямых, в котором никакие две прямые не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. *Плоскостями общего положения* называется такой набор плоскостей в трёхмерном пространстве, в котором никакие две плоскости не параллельны, никакие три не проходят через одну прямую и никакие четыре не проходят через одну точку. **а)** В скольких точках пересекаются n прямых общего положения? **б)** На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения? **в)*** На сколько частей делят пространство n плоскостей общего положения?

Задача 13. (*Задача о ханойских башнях*) Имеются три стержня. На первом из них лежит пирамида из n колец, причём если одно кольцо лежит на другом, то оно меньшего размера. Разрешено перекладывать кольца на другие стержни так, чтобы это свойство сохранялось. Докажите, что:
а) для любого n можно переложить пирамиду с первого стержня на третий;
б) для такого перекладывания достаточно $2^n - 1$ действий;
в) меньшим числом действий обойтись нельзя.

Задача 14*. На химической конференции присутствовало n учёных — химиков и алхимиков, причём химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики всегда отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, а иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого учёного хочет установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому учёному может задать вопрос: «Кем является X: химиком или алхимиком?» (в частности, он может спросить, кем является сам этот учёный). Докажите, что при $n > 1$ математик может установить это за $2n - 3$ вопроса.

Задача 15*. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant \frac{1}{2}$. Докажите, что $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) < 2$.

Задача 16*. На кольцевой автомобильной дороге стоит несколько машин. Известно, что общего количества бензина во всех стоящих автомобилях достаточно для того, чтобы заправленная этим бензином машина смогла объехать всю трассу и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы один из автомобилей, стоящих на дороге, может объехать всё кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

Задача 17*. k пиратов хотят поделить добычу. Любой из них убеждён, что он поделил бы добычу на равные части, однако остальные ему не верят. Каким образом надо действовать пиратам, чтобы после раздела каждый был уверен, что ему досталось не менее $1/k$ части добычи, если
а) $k = 2$, **б)** $k = 3$, **в)** k — произвольное натуральное число?

Задача 18*. Двое играют в игру, исход которой не зависит от случая. Игроки ходят по очереди, причём по правилам игра продолжается не более n ходов и ничьих не бывает. Докажите, что у одного из игроков есть выигрышная стратегия.

Задача 19*. Докажите, что сумма цифр числа N может превосходить сумму цифр числа $5^5 \cdot N$ не более, чем в 5 раз.

10	11	12 а	12 б	12 в	13 а	13 б	13 в	14	15	16	17 а	17 б	17 в	18	19

Примечание. Отдельные случаи применения математической индукции для доказательства бесконечной череды утверждений встречались ещё во времена Древней Греции и Средневековья. Однако принято считать, что своим становлением в качестве одного из важнейших методов обоснования индукция обязана французскому математику Блезу Паскалю (1623-1662 гг.). А её современный вид сложился в XIX веке.