Листок №5д　　　　　　　　　　Производящие функции　　　　　　　　　　12.2014

Определение 1. *Производящей функцией* последовательности $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$ называется формальный степенной ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$.

Задача 1. Пусть даны последовательности (a_n), (b_n) и (c_n). Как связаны между собой их производящие функции $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$, если **а)** $a_n = b_{n-1}$ при $n \geqslant 1$, $a_0 = 0$;
б) $a_n = b_n - b_{n-1}$ при $n \geqslant 1$, $a_0 = b_0$; **в)** $a_n = b_n + 13b_{n-3}$ при $n \geqslant 3$; **г)** $a_n = 2b_n + 1$;
д) $a_n = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$; **е)** $a_n = b_0c_n + b_1c_{n-1} + \ldots + b_{n-1}c_1 + b_nc_0$.

Определение 2. Производящая функция называется *рациональной*, если её можно представить в виде $P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые многочлены.

Задача 2. Докажите, что производящие функции следующих последовательностей являются рациональными: **а)** $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$; **б)** $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$; **в)** (P_n) (пятиугольные числа).

Определение 3. Последовательность (a_n) называется *периодической*, если существует такое натуральное число k (называемое *периодом*), что $a_m = a_{m+k}$ для всех $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Последовательность называется *заключительно-периодической*, если существует такое натуральное число n, что условие $a_m = a_{m+k}$ выполняется для всех $m > n$.

Задача 3. **а)** Докажите, что последовательность (a_n) является заключительно-периодической с периодом k тогда и только тогда, когда её производящая функция представима в виде $\dfrac{P(x)}{1-x^k}$, где $P(x)$ — некоторый многочлен. При каких $P(x)$ последовательность (a_n) — периодическая?
б) Пусть последовательность (a_n) задана рекуррентным соотношением $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$ при $n \geqslant 2$. Докажите, что (a_n) является периодической.

Определение 4. *Числами Фибоначчи* называют члены последовательности (f_n), удовлетворяющую соотношению $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при $n \geqslant 2$ и начальным условиям $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

Задача 4. **а)** Докажите, что производящая функция чисел Фибоначчи равна $\dfrac{x}{1-x-x^2}$.
б) Докажите равенство $f_0 + f_1 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$ и выпишите соответствующее ему соотношение для производящих функций.

Задача 5. Выразите в замкнутой форме производящую функцию последовательностей
а) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ при $n \geqslant 2$, $a_0 = a_1 = 1$; **б)** $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ при $n \geqslant 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 0$;
в) $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ при $n \geqslant 3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$.

Задача 6. **а)** Пусть последовательность (a_n) задана *линейным рекуррентным соотношением порядка* k, то есть $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ при $n \geqslant k$, где $c_1, c_2, \ldots c_k \in \mathbb{R}$, а числа $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ заданы. Докажите, что тогда её производящая функция является рациональной; более того, она может быть представлена в виде $A(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $\deg P < k$, $\deg Q = k$.
б) Как найти $P(x)$ и $Q(x)$?

Задача 7. Найдите явную формулу для n-го числа последовательности (a_n), если
а) (a_n) — это последовательность из задачи 5б; **б)** $a_n = a_{n-1} + 2$ при $n \geqslant 1$, $a_0 = 1$;
в) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$ при $n \geqslant 2$, $a_0 = a_1 = 1$;
г) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + \ldots + na_0$, $a_0 = a_1 = 1$; **д)** $a_n = f_n$ — числа Фибоначчи.

Замечание. Явная формула для n-го числа Фибоначчи называется *формулой Бине*.

1 а	1 б	1 в	1 г	1 д	1 е	2 а	2 б	2 в	3 а	3 б	4 а	4 б	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д

Задача 8. **а)** Раскройте скобки в произведении $\prod\limits_{i=0}^{\infty}(1+x^{2^i}) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots$.
б) Докажите, что любое натуральное число однозначно записывается в двоичной системе счисления, и выпишите аналогичное тождество для троичной системы счисления.

Задача 9. **а)** Сколькими способами можно разменять 57¢ монетами по 1¢, 2¢, 5¢ и 10¢?
б) Найдите коэффициент при x^{57} в формальном ряде $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$.
в) Найдите производящую функцию для числа решений уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k = n$, где $a_1, \ldots, a_k$ — заданные натуральные числа, а $x_1, \ldots, x_k$ — целые неотрицательные переменные.
г) Найдите производящую функцию последовательности $a_n = C_{n+k}^k$, где $k \in \mathbb{N}$.

Задача 10. **а)** Докажите, что $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots} = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots$.
б) Докажите, что каждое натуральное число можно представить в виде суммы различных натуральных слагаемых столькими же способами, сколькими его можно представить в виде суммы нечётных натуральных слагаемых.
в)* Постройте взаимно однозначное соответствие между разбиениями числа n из предыдущего пункта.

Задача 11. **а)** Пусть a_n — количество способов разменять n рублей с помощью монет по 2 рубля, 1 рублю и 50 копеек. Найдите производящую функцию для (a_n).
б) Найдите производящую функцию последовательности (f_{2n}), где f_n — числа Фибоначчи.
в)* Докажите, что если производящая функция последовательности (a_n) рациональна, то рациональной является и производящая функция последовательности (a_{2n}).

Задача 12. Коала сидит в вершине A шестиугольника $ABCDEF$. За один ход она переходит в соседнюю с ней вершину. Пусть $a_n, \ldots, f_n$ — число путей из n шагов, оканчивающихся в $A, \ldots, F$ соответственно, а $A(x), \ldots, F(x)$ — производящие функции этих последовательностей.
а) Как выразить $B(x)$ и $E(x)$ через $A(x)$ и $C(x)$?
б) Выразите в замкнутой форме $A(x)$ и выведите явную формулу для a_n.

Задача 13. **а)** Чему равно число замощений прямоугольника $2 \times n$ плитками домино 1×2?
б)* А сколькими способами плитками домино 1×2 можно замостить прямоугольник $3 \times n$?

Задача 14*. Марсоход обнаружил, что органическое вещество на Марсе имеет ДНК, в состав которой входят пять символов, обозначаемых a, b, c, d, e (вместо четырёх в земных ДНК). При этом пары символов cd, ce, ed, ee никогда не встречаются в марсианских ДНК, но любая цепочка, не содержащая таких пар, возможна. Сколько цепочек длины n может существовать на Марсе?

Задача 15*. Будут ли рациональными производящие функции следующих последовательностей:
а) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$; **б)** nf_n; **в)** f_n^2; **г)** $n!$ (как и выше, f_n — это числа Фибоначчи)?

8 а	8 б	9 а	9 б	9 в	9 г	10 а	10 б	10 в	11 а	11 б	11 в	12 а	12 б	13 а	13 б	14	15 а	15 б	15 в	15 г

Примечание. Метод производящих функций для комбинаторных нужд был разработан Леонардом Эйлером (1707-1783 гг.) в середине XVIII века. Что ещё можно сделать с его помощью, вы узнаете в следующем листочке на эту тему (если повезёт, конечно).