Определение 1. Множества X и Y называются *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение $f: X \to Y$. Обозначение: $|X| = |Y|$.

Задача 1. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ является взаимно однозначным тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1. Для любых двух различных элементов $x_1, x_2 \in X$ их образы различны: $f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. Каждый элемент $y \in Y$ имеет прообраз, то есть существует $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

Задача 2. Докажите, что равномощность является отношением эквивалентности, то есть
а) $|A| = |A|$; **б)** если $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$; **в)** если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Задача 3. Докажите, что для любых множеств X и Y выполнено $|X \times Y| = |Y \times X|$.

Задача 4. Верно ли, что если $|A| = |B|$ и $|C| = |D|$, то
а) $|A \times C| = |B \times D|$; **б)** $|A \cup C| = |B \cup D|$; **в)** $|A \cap C| = |B \cap D|$?

Определение 2. Множество называется *конечным*, если оно равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого натурального n или пусто. Говорят, что множество *бесконечно*, если оно не является конечным.

Определение 3. Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Говорят, что множество *не более чем счётно*, если оно конечно или счётно. Множество называется *несчётным*, если оно бесконечно и не является счётным.

Задача 5. Докажите, что следующие множества являются счётными:
а) множество чётных натуральных чисел;
б) множество нечётных натуральных чисел;
в) множество натуральных чисел без числа 2015;
г) множество целых чисел $\mathbb{Z}$.

Задача 6. Докажите, что всякое подмножество счётного множества не более чем счётно.

Задача 7. Докажите, что если X счётно, а Y конечно и непусто, то $X \times Y$ счётно.

Определение 4. *Объединением счётного числа множеств* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ называется множество, состоящее из всех таких элементов x, что $x \in A_n$ хотя бы для одного натурального n.
Обозначение: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Задача 8°. Докажите, что следующие множества являются счётными:
а) объединение конечного числа счётных множеств;
б) декартово произведение двух счётных множеств;
в) объединение счётного числа различных конечных множеств;
г) объединение счётного числа счётных множеств.

Задача 9°. Докажите, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является счётным.

Задача 10. Верно ли, что следующие множества являются счётными:
а) множество всевозможных конечных последовательностей нулей и единиц;
б) множество всевозможных русских «слов»;
в) множество конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$?

1	2 а	2 б	2 в	3	4 а	4 б	4 в	5 а	5 б	5 в	5 г	6	7	8 а	8 б	8 в	8 г	9	10 а	10 б	10 в

Задача 11. Являются ли равномощными:
а) любые два отрезка на плоскости;
б) любые две окружности на плоскости;
в) интервал и полуокружность без концов;
г) интервал и прямая;
д) квадрат и круг?

Задача 12. Докажите, что у всякого бесконечного множества есть счётное подмножество.

Задача 13°. Пусть A не более чем счётно, а B бесконечно. Докажите, что $|A \cup B| = |B|$.

Задача 14. Докажите, что множество точек произвольного отрезка равномощно множеству точек произвольного интервала.

Задача 15°. Докажите, что множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ и множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц **а)** равномощны; **б)** несчётны.

Задача 16*. Докажите, что множества из задачи 15 равномощны
а) множеству $P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})$, где $P(\mathbb{N})$ — это множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$;
б) множеству взаимно однозначных отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$;
в) множеству всех бесконечных последовательностей натуральных чисел.

Задача 17*. Является ли счётным любое бесконечное множество непересекающихся
а) интервалов на прямой;
б) кругов на плоскости;
в) восьмёрок на плоскости (восьмёрка — это две касающиеся внешним образом окружности);
г) букв «Т» на плоскости (буква «Т» — это два перпендикулярных друг другу отрезка, конец одного из которых является серединой другого)?
(Все объекты в данной задаче могут иметь любые размеры)

11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	12	13	14	15 а	15 б	16 а	16 б	16 в	17 а	17 б	17 в	17 г

Примечание. Говорят, что множество *континуа́льно* (или что оно *имеет мощность конти́нуум*), если оно равномощно множествам из задачи 15. Наряду со счётными множествами, множества мощности континуум встречаются нам наиболее часто среди всех бесконечных множеств. Так, континуальными множествами являются отрезок, прямая, плоскость (и всё это в своё время мы докажем). Однако не стоит думать, что если множество бесконечно, то оно либо счётно, либо континуально. Каждому из вас, немного подумав, под силу построить соответствующий пример.

Одной из центральных проблем теории множеств первой половины XX-го века стала выдвинутая в 1877 году Гео́ргом Ка́нтором (1845-1918 гг.) так называемая *континуум-гипотеза*. Её формулировка такова: *любое бесконечное подмножество континуального множества либо счётно, либо континуально*. Значимость континуум-гипотезы была столь велика, что она стала первой среди проблем века, которые Дави́д Ги́льберт (1862-1943 гг.) представил в своём знаменитом докладе на II Международном Конгрессе математиков в Париже в 1900 году.

Тем удивительней её дальнейшая судьба. В 1940 году Курт Фри́дрих Гёдель (1906-1978 гг.) убедился, что отрицание континуум-гипотезы недоказуемо. А в 1963 году Пол Джо́зеф Ко́эн (1934-2007 гг.) показал, что континуум-гипотеза также недоказуема. То есть получается, что континуум-гипотезу нельзя ни доказать, ни опровергнуть!

Таким образом, каждый может сам для себя решить, считает ли он континуум-гипотезу справедливой или нет.