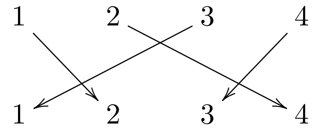
Определение 1. *Перестановкой из n элементов* называется взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. Перестановки записывают таблицами вида $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; такая таблица означает перестановку $1 \mapsto 2$ (то есть 1 переходит в 2), $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 3$. Для наглядности, ту же перестановку можно изобразить картинкой вида

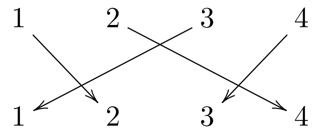


Запись вида $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$, где как $i_1, i_2, \ldots, i_n$, так и $j_1, j_2, \ldots, j_n$ являются различными элементами множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, называется *подстановкой* и обозначает перестановку σ, для которой $\sigma(i_k) = j_k$ при всех $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Множество всех перестановок из n элементов обозначается S_n и называется *симметрической группой.*

Задача 1. **а)** Сколько элементов содержится в множестве S_n? **б)** Докажите, что мы можем записать любую перестановку как в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$, так и в виде $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

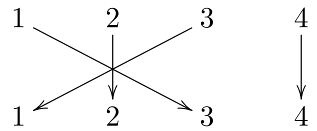
Определение 2. *Произведением* $\sigma\tau$ перестановок σ и τ называется перестановка $\sigma \circ \tau$. Например, если

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



,

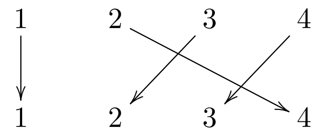
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



,

то

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



Отметим, что сначала применяется второй сомножитель, а потом первый.

Задача 2. Вычислите, чему равны следующие перестановки:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; **г)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$; **е)** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 9 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Определение 3. Перестановка $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$ называется *тождественной.*

Задача 3. Докажите, что:

а) для любой перестановки $\sigma \in S_n$ справедливо $\sigma e = e\sigma = \sigma$;

б) для любых перестановок $\sigma, \tau, \eta \in S_n$ выполнено равенство $(\sigma\tau)\eta = \sigma(\tau\eta)$;

в) для любой перестановки $\sigma \in S_n$ найдется такая перестановка $\tau \in S_n$, что $\sigma\tau = \tau\sigma = e$;
(такая перестановка τ называется *обратной к* σ; обозначение: $\tau = \sigma^{-1}$)

г) если $\sigma\tau = e$, то $\tau = \sigma^{-1}$, $\sigma = \tau^{-1}$;

д) для любой перестановки $\sigma \in S_n$ справедливо равенство $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$.

Определение 4. Говорят, что перестановки $\sigma, \tau \in S_n$ *коммутируют,* если $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Задача 4. **а)** Приведите пример некоммутирующих перестановок.

б) Найдите все такие перестановки $\tau \in S_n$, что $\sigma\tau = \tau\sigma$ для любой перестановки $\sigma \in S_n$.

в) Дайте определение *степени перестановки* σ^k для целого k. Докажите, что если σ и τ коммутируют, то для любого целого k выполняется равенство $(\sigma\tau)^k = \sigma^k\tau^k$.

Задача 5. Докажите, что для любой перестановки $\sigma \in S_n$ существует натуральное k, для которого $\sigma^k = e$. Наименьшее такое k называется *порядком* перестановки σ (обозначение: $\operatorname{ord}\sigma$).

Задача 6. Вычислите, чему равны следующие перестановки:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{100}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1000}$; **г)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{500}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-127}$; **е)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{1001}$; **ж)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^n$.

1 а	1 б	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	2 е	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	4 а	4 б	4 в	5	6 а	6 б	6 в	6 г	6 д	6 е	6 ж

Определение 5. Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *циклом длины* m, если существуют такие различные числа $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $\sigma(i_k) = i_{k+1}$ при $k < m$, $\sigma(i_m) = i_1$ и $\sigma(j) = j$ при $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$. Обозначение: $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Определение 6. *Транспозицией* называется цикл длины два. Транспозиция вида $(i, i+1)$ называется *элементарной.*

Задача 7. Найдите порядок цикла длины m.

Задача 8. **а)** Докажите, что если σ и τ — *независимые циклы* (то есть множества элементов этих циклов не пересекаются), то $\sigma\tau = \tau\sigma$. **б)** Верно ли, что два цикла коммутируют тогда и только тогда, когда они независимы?

Задача 9. **а)** Представьте перестановки из задачи 2 в виде произведения независимых циклов.
б) Докажите, что любую перестановку можно представить в виде произведения независимых циклов.

Задача 10. Найдите максимальный порядок перестановки из **а)** S_5; **б)** S_{13}; **в)*** S_n.

Задача 11. Докажите, что $n!$ делится на $\operatorname{ord}\sigma$ для любой перестановки $\sigma \in S_n$.

Задача 12. Текст, написанный на русском языке, зашифрован программой, заменяющей взаимно однозначно каждую букву на некоторую другую.
а) Докажите, что существует такое число k, что текст расшифровывается применением шифрующей программы ровно k раз.
б) Найдите хотя бы одно такое k.

Задача 13. **а)** Докажите, что любую перестановку можно представить как произведение транспозиций.
б) Докажите, что любую перестановку можно представить как произведение элементарных транспозиций.

Задача 14*. Несколько жителей города N хотят обменяться квартирами. У каждого есть по квартире, но каждый хочет переехать в другую (разные люди хотят переехать в разные квартиры). По законам города разрешены только парные обмены: если два человека обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах. Докажите, что можно устроить парные обмены так, что уже через два дня каждый будет жить в той квартире, куда хотел переехать.

Определение 7. *Беспорядком* или *инверсией* в перестановке σ называется любая пара (i, j), для которой $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. Перестановка называется *чётной*, если число инверсий в ней чётно, и *нечётной* в противном случае. Множество всех чётных перестановок из S_n обозначается A_n и называется *знакопеременной группой.*

Задача 15. Как увидеть инверсии на картинках из определения 2? (Каким *геометрическим* объектам они отвечают?)

Задача 16. Можно ли сказать, сколько инверсий у перестановки σ^{-1}, зная лишь число инверсий у σ?

Задача 17. Какие из перестановок, представленных в задаче 2, чётные?

Задача 18. Является ли чётной перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$?

Задача 19. Докажите, что любая транспозиция является нечётной перестановкой.

Задача 20. Докажите, что при умножении на транспозицию чётность перестановки меняется.

Задача 21. Докажите, что чётность цикла зависит только от его длины. Как?

Задача 22. **а)** Как выражается чётность $\sigma\tau$ через чётности σ и τ?
б) Как выражается чётность σ^n через чётности σ и n?

Задача 23. Сколько элементов в A_n?

Задача 24*. Почему задача Ллойда об игре в 15 неразрешима?

Задача 25*. Каждому из n мудрецов написали на лбу число и выдали две варежки: чёрную и белую. По сигналу все мудрецы одновременно надевают варежки. После этого их строят в шеренгу в порядке возрастания написанных на их лбах чисел и просят соседей взяться за руки. Как мудрецам надевать варежки, чтобы в результате каждая белая варежка взялась за белую, а каждая чёрная — за чёрную? (Мудрец видит все числа, кроме своего; все написанные на лбах числа различны.)

7	8 а	8 б	9 а	9 б	10 а	10 б	10 в	11	12 а	12 б	13 а	13 б	14	15	16	17	18	19	20	21	22 а	22 б	23	24	25