Листок №19 **Непрерывность функции** 03.2016

Определение 1. Функция f, определённая на множестве M, называется *непрерывной в точке* $x_0 \in M$, если x_0 — изолированная точка множества M или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 2. (*Непрерывность в смысле Гейне*) Функция f, определённая на множестве M, называется *непрерывной в точке* $x_0 \in M$, если для любой последовательности (x_n) элементов множества M, сходящейся к x_0, последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x_0)$.

Определение 3. (*Непрерывность в смысле Коши*) Функция f, определённая на множестве M, называется *непрерывной в точке* $x_0 \in M$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x из множества $U_\delta(x_0) \cap M$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.

Формально: $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \ \forall\, x \in U_\delta(x_0) \cap M : \ \ f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.

Задача 1°. Докажите эквивалентность определений 1, 2 и 3.

Определение 4. Функция f, определённая на множестве M, называется *разрывной в точке* $x_0 \in M$, если она не является непрерывной в этой точке. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, если существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, и *точкой разрыва второго рода* иначе.

Задача 2°. **а)** Дайте определение функции, непрерывной слева (справа) в данной точке.
б) Сформулируйте определение разрывности функции в данной точке на языке кванторов.

Определение 5. Функция f называется *непрерывной на множестве* M, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Задача 3. Приведите пример функции, определённой на $\mathbb{R}$, множество точек разрыва которой есть:
а) $\{0\}$; **б)** $\mathbb{N}$; **в)** $\mathbb{R}$; **г)** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; **д)** $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; **е)*** $\mathbb{Q}$.

Задача 4. Пусть функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ непрерывна и положительна (отрицательна) в точке x_0. Докажите, что тогда она положительна (отрицательна) в некоторой окрестности точки x_0.

Задача 5°. Пусть функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ и $g\colon M \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке x_0. Докажите, что тогда функции $(f \pm g)$, fg и f/g (при условии, что $g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

Задача 6. Исследуйте на непрерывность следующие функции: **а)** $f(x) = \operatorname{sign}(x)$;
б) $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } |x| > 1, \\ x^2, & \text{если } |x| \leqslant 1; \end{cases}$ **в)** $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$; **г)** $f(x) = \dfrac{[x]}{x}$.

Задача 7°. (*Теорема о непрерывности композиции*) Пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Докажите, что функция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0.

Задача 8°. *Первая теорема Больцано–Коши (об обращении функции в нуль)*
Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков (т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$). Тогда найдётся такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = 0$.

Задача 9°. *Вторая теорема Больцано–Коши (о промежуточном значении)*
Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Докажите, что для любого значения y из отрезка $[f(a), f(b)]$ (или $[f(b), f(a)]$, если $f(b) < f(a)$) существует такой $x \in [a, b]$, что $f(x) = y$.

Задача 10. *Теорема о существовании корня у многочлена нечётной степени*
Пусть P — многочлен нечётной степени. Докажите, что найдётся такое $a \in \mathbb{R}$, что $P(a) = 0$.

Задача 11°. *Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной функции)*
Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Докажите, что функция f ограничена на $[a, b]$.

1	2 а	2 б	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	3 е	4	5	6 а	6 б	6 в	6 г	7	8	9	10	11

Задача 12°. *Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной функцией своих точных верхней и нижней граней).* Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она достигает на нём своих точных нижней и верхней граней, то есть существуют такие точки c и C, принадлежащие $[a, b]$, что $f(c) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $f(C) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Задача 13. Приведите пример ограниченной функции, которая бы не достигала на области определения своих точных верхней и нижней граней, если известно, что эта функция
а) определена на отрезке $[a, b]$; **б)** определена и непрерывна на $\mathbb{R}$.

Задача 14. Непостоянная функция f определена и непрерывна на множестве $I \subset \mathbb{R}$. Каким может быть множество значений $E(f)$, если I **а)** отрезок; **б)** интервал; **в)** прямая?

Задача 15. Пусть функции f и g непрерывны на множестве M. Докажите, что следующие функции также непрерывны на M: **а)** $|f|$; **б)** $\max(f, g)$; **в)** $\min(f, g)$.

Задача 16. Пусть $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ — непрерывная функция. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет хотя бы один корень.

Задача 17. Выпуклый многоугольник F, точка A и прямая l лежат в одной плоскости. Докажите, что существует прямая l', которая разбивает F на два равновеликих многоугольника, и при этом
а) l' параллельна прямой l; **б)** l' проходит через A.

Задача 18*. Докажите, что монотонная функция имеет не более, чем счётное число точек разрыва.

Задача 19*. На кухне имеется хорошая табуретка на четырёх ножках, но вот пол там неровный. Всегда ли можно поставить табуретку так, чтобы она не качалась?

Задача 20*. Пусть функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. Докажите, что если уравнение $f(x) = x$ не имеет корней, то и уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет корней.

Задача 21*. (*Теоремы о блинах*) **а)** Пусть F_1 и F_2 — два выпуклых многоугольника. Докажите, что найдётся прямая, делящая каждый из них на две равновеликие части.
б) Пусть F — выпуклый многоугольник. Докажите, что существует две взаимно перпендикулярные прямые, разбивающие F на четыре равновеликих многоугольника.

Задача 22*. Известно, что непостоянная функция f непрерывна на $\mathbb{R}$. Докажите, что найдётся такое иррациональное число r, что значение $f(r)$ также иррационально.

Задача 23*. **а)** Земной шар стянули верёвкой по экватору. Затем длину верёвки увеличили на 1 метр, а саму верёвку «распределили» так, чтобы зазор между верёвкой и поверхностью Земли был одинаковым по всей длине верёвки. Может ли в этот зазор пролезть мышь?
б) А если эту же удлинившуюся веревку в одной точке натянуть вверх, пройдёт ли под ней слон?

Задача 24*. **а)** Существует ли определённая на $\mathbb{R}$ функция, которая всюду разрывна, но имеет предел в каждой точке?
б) Существует ли определённая на $\mathbb{R}$ функция, которая непрерывна в каждой рациональной точке и разрывна в каждой иррациональной точке?

12	13 а	13 б	14 а	14 б	14 в	15 а	15 б	15 в	16	17 а	17 б	18	19	20	21 а	21 б	22	23 а	23 б	24 а	24 б

Примечание. Понятие непрерывности в точке было впервые рассмотрено в 1817 году Берна́рдом Больца́но (1781–1848 гг.). Однако работы Больцано долгое время оставались неизвестными, поэтому определение 3 названо в честь Огюсте́на Луи́ Коши́ (1789–1857 гг.), который изложил свою теорию в 1821 году. Стоит отметить, что Коши дал лишь словесное описание; современное определение в терминах $\varepsilon - \delta$ было дано Карлом Те́одором Вильге́льмом Ве́йерштрассом (1815–1897 гг.), он же ввёл в обращение обозначение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Что же касается определения 2, то оно названо в честь немецкого математика Ге́нриха Эдуа́рда Ге́йне (1821–1881 гг.).