Листок №8д   # Теория множеств — 4   09.2015

Определение 1. Разобьём совокупность всех множеств на классы так, что два множества попадают в один класс тогда и только тогда, когда они равномощны. Сопоставим каждому такому классу какой-либо символ (*кардинальное число*) и назовём его *мощностью* любого *множества* из данного класса. Мощность множества A обозначим $|A|$.

Мощность любого конечного множества обозначается так же, как и число его элементов.

Мощность счётного множества обозначается $\mathfrak{c}_0$ (или $\aleph_0$ — алеф-нуль).

Мощность множества бесконечных последовательностей нулей и единиц называется *мощностью континуума* и обозначается $\mathfrak{c}$.

Определение 2. Множество подмножеств множества A обозначим $P(A)$. Символом 2^α будем обозначать мощность множества $P(A)$, где $|A| = \alpha$.

Задача 1. Найдите мощности следующих множеств: **а)** $P(\{1, 2, \ldots, n\})$; **б)** $P(\mathbb{N})$.

Задача 2. Пусть X — множество взаимно однозначных отображений одного счётного множества в другое. Докажите, что X несчётно.

Задача 3. Найдите мощности следующих множеств:

а) Множество всех конечных последовательностей натуральных чисел.

б) Множество всех строго возрастающих последовательностей (конечных и бесконечных) натуральных чисел.

в) Множество всех последовательностей (конечных и бесконечных) натуральных чисел.

г) Множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел.

Задача 4. (*Теорема Кантора*) Докажите, что $2^\alpha \neq \alpha$ для любого кардинального числа α.

Определение 3. Будем говорить, что *мощность множества A не меньше мощности множества B*, если B равномощно некоторому подмножеству множества A (обозначение: $|A| \geqslant |B|$). При этом *мощность множества A строго больше множества B*, если $|A| \geqslant |B|$ и $|A| \neq |B|$ (обозначение: $|A| > |B|$).

Задача 5. Докажите, что: **а)** $|A| \geqslant |A|$; **б)** если $|A| \geqslant |B|$ и $|B| \geqslant |C|$, то $|A| \geqslant |C|$.

Задача 6. Пусть A — конечное множество, а B — бесконечное. Докажите, что:

а) $|A| < \mathfrak{c}_0$; **б)** $\mathfrak{c}_0 \leqslant |B|$; **в)** $\mathfrak{c}_0 < \mathfrak{c}$.

Задача 7. Существует ли такое кардинальное число α, что $2^\alpha = \mathfrak{c}_0$?

Задача 8. Пусть I — множество точек отрезка $[0, 1]$. Докажите, что $|I| \leqslant \mathfrak{c}$.

Задача 9. (*Теорема Кантора-Бернштейна*) Докажите, что если множества A и B удовлетворяют условию $|A| \geqslant |B|$ и $|B| \geqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Задача 10. Найдите мощность множества, определённого в задаче 2.

Задача 11. Докажите, что различных кардинальных чисел, соответствующих бесконечным множествам, бесконечно много.

Определение 4. Пусть мощности непересекающихся множеств A и B равны α и β соответственно. Будем говорить об операциях над мощностями в следующем смысле:

– *суммой мощностей* называется мощность множества $A \cup B$ (обозначение: $\alpha + \beta$);

– *произведением мощностей* называется мощность множества $A \times B$ (обозначение: $\alpha \cdot \beta$);

– *мощностью α, возведённой в степень β* называется мощность множества всех отображений вида $f\colon B \to A$ (обозначение: α^β).

Задача 12. **а)** Проверьте, что определения 2 и 4 друг другу не противоречат.

б) Убедитесь, что для конечных множеств операции над мощностями совпадают со стандартными операциями над числами. **в)** Вспомните, что $\mathfrak{c}_0 + n = \mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_0 = \mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 = \mathfrak{c}_0$, $2^{\mathfrak{c}_0} = \mathfrak{c}$.

Задача 13. Докажите, что операции над мощностями обладают следующими свойствами:

а) $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$; **б)** $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$; **в)** $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$; **г)** $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

Задача 14. Проверьте следующие равенства:

а) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$; **б)** $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$; **в)** $\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$; **г)** $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}_0} = \mathfrak{c}$; **д)** $\mathfrak{c}_0^{\mathfrak{c}_0} = \mathfrak{c}$; **е)** $\mathfrak{c}_0^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

1 а	1 б	2	3 а	3 б	3 в	3 г	4	5 а	5 б	6 а	6 б	6 в	7	8	9	10	11	12 а	12 б	12 в	13 а	13 б	13 в	13 г	14 а	14 б	14 в	14 г	14 д	14 е

Примечание. В этом листочке мы подошли к тому моменту, когда наглядные представления о множествах приводят к противоречию. Действительно, рассмотрим, например, множество всех множеств U, элементами которого являются все множества. Тогда, в частности, все его подмножества тоже будут его элементами, то есть $P(U) \subset U$. Однако это противоречит теоремам Кантора и Кантора-Бернштейна.

Приведём ещё один пример того же сорта, называемый обычно *парадоксом Рассела*. Типичное множество не содержит себя в качестве элемента. Однако в принципе можно представить себе множество, являющееся своим собственным элементом (например, множество всех множеств). Такие множества мы будем называть «необычными». Рассмотрим теперь множество всех «обычных» множеств. Является ли оно «обычным»? Если да, то оно является своим собственным элементом, а значит, «необычное». И наоборот.

Вопрос о том, что плохого в этих и им подобных рассуждениях, весьма непростой. Его обсуждением были заняты лучшие умы науки на протяжении всей первой половины XX-го века. Выводы, к которым в итоге человечество пришло, примерно таковы. Понятие множества не является непосредственно очевидным; разные люди (и даже научные традиции) могут воспринимать его поразному. Множества — слишком абстрактные объекты, чтобы вопрос «А как на самом деле?» имел смысл. Например, утверждение континуум-гипотезы мы можем принять как истинным, так и ложным — при этом получатся две разные теории, но ни одна из них не будет лучше другой. Чтобы не возникало противоречий и парадоксов, нужно проявлять осторожность и избегать определённого вида рассуждений.

Одни из «безопасных» правил обращения с множествами (по крайней мере пока не приведших к противоречию) сформулированы в аксиоматической теории множеств Цермело и Френкеля. Есть и другие, менее популярные теории. Не вдаваясь в подробности, ограничимся неформальным описанием ограничений, накладываемых во избежание появляния противоречий. Главное заключается в следующем: нельзя сразу рассматривать слишком большие множества; строить множества можно только постепенно. Например, можно образовать множество всех подмножеств данного множества (аксиома степени). Можно рассмотреть подмножество элементов данного множества, обладающих каким-либо выделенным свойством (аксиома выделения). Есть и другие аксиомы.

Таким образом, когда мы говорим о мощности как о классе всех множеств, обладающих определёнными свойствами, мы ни в коем случае не можем рассматривать этот класс в качестве множества и оперировать с ним как с множеством. Грубо говоря, потому что он является слишком большим.

P.S. Большая часть настоящего примечания извлечена из прекрасной книжки Н.К. Верещагина и А. Шеня «Начала теории множеств».