Листок №23 — **Неопределённый интеграл** — 11.2016

Определение 1. Пусть функция f определена на открытом[1] множестве $M \subset \mathbb{R}$. *Первообразной функции* f на M называется такая функция F, что для всех точек $x \in M$ выполнено $F'(x) = f(x)$.

Определение 2. Совокупность всех первообразных функции f на открытом множестве M называется *неопределённым интегралом* функции f. Обозначение: $\int f(x)\,dx$.

Задача 1. **а)** Пусть F_1 и F_2 — две различные первообразные функции f, определённой на интервале $(a;b)$. Докажите, что $(F_1 - F_2)$ — константа.
б) Справедливо ли утверждение пункта а), если область определения функции f — произвольное открытое множество?
Замечание. Если функция F является первообразной функции f на интервале $(a;b)$, то пишут
$$\int f(x)\,dx = F + C,$$
подразумевая, что в правой части равенства стоит множество (семейство) всех функций вида $F + C$, где C — произвольная постоянная.

Задача 2. Найдите все первообразные функций f на области определения, если:
а) $f(x) = 1$; **б)** $f(x) = x$; **в)** $f(x) = |x|$; **г)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$; **д)** $f(x) = \sqrt{x}$.

Задача 3. Найдите все первообразные функций f на области определения, если:
а) $f(x) = x^k,\ k \in \mathbb{N}$; **б)** $f(x) = x^k,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; **в)** $f(x) = e^x$; **г)** $f(x) = \sin x$;
д) $f(x) = \cos x$; **е)** $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; **ж)** $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; **з)** $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{если } |x| \geqslant 1 \\ x, & \text{если } |x| < 1 \end{cases}$.

Задача 4. Приведите пример функции, не имеющей первообразных на области определения.

Задача 5. Пусть функция f непрерывна на некотором промежутке M. Зафиксируем точку a из этого промежутка и рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Докажите, что
а) F непрерывна на M; **б)** F дифференцируема во всех внутренних точках M.

Задача 6. Докажите, что функция, непрерывная на открытом множестве, имеет первообразную.

Задача 7. (*Формула Ньютона-Лейбница*) Пусть функции f и F непрерывны на $[a;b]$, причём F является первообразной f на $(a;b)$. Докажите, что
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Задача 8. Приведите пример функции, определённой на отрезке $[a;b]$, которая
а) интегрируема на отрезке $[a;b]$, но не имеет первообразной на интервале $(a;b)$;
б) не интегрируема на отрезке $[a;b]$, но имеет первообразную на интервале $(a;b)$;
в)* ограничена, не интегрируема на отрезке $[a;b]$, но имеет первообразную на интервале $(a;b)$.

Задача 9. Пусть функции f и g имеют первообразные на интервале $(a;b)$. Докажите, что тогда для любых чисел α и β функция $(\alpha f(x) + \beta g(x))$ имеет первообразную на $(a;b)$, причём[2]
$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

1 а	1 б	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	3 е	3 ж	3 з	4	5 а	5 б	6	7	8 а	8 б	8 в	9

[1] То есть являющемся объединением интервалов.
[2] Обратите внимание, что с обеих сторон равенства стоят множества.

Задача 10. (*Линейная замена переменной*) Пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Докажите, что

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Задача 11. (*Общий случай замены переменной*) Пусть функции $f(t)$ и $\varphi(x)$ заданы на некоторых интервалах (каждая на своём) так, что определена композиция $f\circ\varphi$. Пусть, далее, f имеет первообразную F, а φ дифференцируема. Докажите, что тогда функция $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ имеет первообразную, причём

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F\circ\varphi + C.$$

Задача 12. Пусть $a\in\mathbb{R}$. Вычислите следующие неопределённые интегралы:
а) $\int e^{e^x+x}\,dx$; **б)** $\int xe^{x^2}\,dx$; **в)** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$; **г)** $\int \sin x\cos x\,dx$; **д)** $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$;
е) $\int \operatorname{tg} x\,dx$; **ж)** $\int \operatorname{ctg} x\,dx$; **з)** $\int \frac{dx}{\sin x}$; **и)** $\int \frac{dx}{\cos x}$; **к)** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; **л)** $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

Задача 13. **а)** Пусть функция $\varphi(x)$ монотонна и дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, а её производная $\varphi'(x)$ непрерывна на этом отрезке. Пусть, кроме того, $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$. Докажите, что для любой непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции f

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$$

б) Справедливо ли утверждение пункта а), если $\varphi(x)$ не является монотонной?

Задача 14. Вычислите следующие интегралы: **а)** $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; **б)** $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

Задача 15. (*Интегрирование по частям*) Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые на некотором интервале функции, и пусть существует интеграл $\int u(x)v'(x)\,dx$. Докажите, что тогда существует интеграл $\int u'(x)v(x)\,dx$, причём

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Задача 16. Пусть $k\in\mathbb{N}$. Вычислите следующие интегралы:
а) $\int \ln x\,dx$; **б)** $\int xe^x\,dx$; **в)** $\int e^x\sin x\,dx$; **г)** $\int e^x\cos x\,dx$; **д)** $\int x^k e^x\,dx$; **е)** $\int \ln^k x\,dx$.

Задача 17. (*Формула Тейлора*) Пусть $f(x)$ — функция, обладающая на промежутке M непрерывной $(n+1)$-ой производной. Докажите, что тогда при $x, x_0\in M$ выполняется

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Задача 18. **а)** Найдите точную верхнюю грань чисел $\int\limits_0^1 xf(x)\,dx$ по всем непрерывным неотрицательным на отрезке $[0;1]$ функциям f, для которых выполнено условие $\int\limits_0^1 f(x)\,dx \leqslant 2$.

б) Каким будет ответ, если не требовать неотрицательности функции f?

10	11	12 а	12 б	12 в	12 г	12 д	12 е	12 ж	12 з	12 и	12 к	12 л	13 а	13 б	14 а	14 б	15	16 а	16 б	16 в	16 г	16 д	16 е	17	18 а	18 б