Определение 1. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — непустое конечное множество, и каждому элементу $\omega \in \Omega$ поставлено в соответствие действительное число (*вес*) $P(\omega)$, причём выполнены следующие условия:

1^0. Для любого $\omega \in \Omega$ вес неотрицателен: $P(\omega) \geqslant 0$.

2^0. Сумма весов всех элементов из Ω равна единице: $P(\omega_1) + \ldots + P(\omega_n) = 1$.

Тогда множество Ω вместе с набором весов $\{P(\omega_1), \ldots, P(\omega_n)\}$ называется *вероятностным пространством*. Элементы множества Ω называются (*элементарными*) *исходами*, подмножества — *событиями*. Для каждого события $A \subset \Omega$ определим число $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\omega)$. Это число называется *вероятностью события* A. Кроме того, приняты следующие обозначения: $\overline{A} = \Omega \setminus A$, $AB = A \cap B$, $A + B = A \cup B$.

Задача 1°. Пусть Ω — вероятностное пространство, $A, B \subset \Omega$ — события. Докажите, что:
а) $P(\emptyset) = 0$; **б)** $P(\Omega) = 1$; **в)** $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; **г)** если $A \subset B$, то $P(A) \leqslant P(B)$;
д) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$; **е)** $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

В каждой из предлагаемых ниже задач определите подходящее вероятностное пространство, если оно ещё не определено, а затем уже переходите к использованию понятия вероятности.

Задача 2. Глеб и Тёма поочерёдно извлекают шары (без возвращения) из урны, содержащей m белых и $(n - m)$ чёрных шаров, начинает Тёма. Выигрывает тот, кто первым вытянет белый шар. Найдите вероятность выигрыша Глеб, если
а) $n = 5$, $m = 1$; **б)** $n = 7$, $m = 2$; **в)*** m и n — произвольные натуральные числа.

Задача 3. **а)** Верно ли, что вероятность того, что в классе из 25 человек у двух учеников день рождения в один и тот же день, больше $1/2$?
б) При каких $n \in \mathbb{N}$ это же утверждение верно для класса, в котором n человек?
в)* Сколько людей на улице вам придется опросить, чтобы встретить человека с такой же датой рождения как и у вас с вероятностью больше $1/2$.
Замечание. При решении пункта б) этой задачи допускается использование вычислительной техники.

Определение 2. Пусть Ω — вероятностное пространство, A и B — события, причём $P(B) > 0$. *Условной вероятностью* события A при условии события B называется число $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

Задача 4°. Докажите следующие свойства условной вероятности:
а) $P(A|A) = 1$; **б)** $P(\Omega|A) = 1$; **в)** $P(\emptyset|A) = 0$; **г)** если $A \subset B$, то $P(B|A) = 1$;
д) $P(A + B \,|\, C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$.

Задача 5. Верны ли следующие соотношения для произвольных событий A и B в вероятностном пространстве Ω (в тех случаях, когда соответствующие условные вероятности определены):
а) $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$; **б)** $P(A|B) + P(A|\overline{B}) = 1$; **в)** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$?

Задача 6. Ваня бросил две игральные кости. Найдите вероятность того, что выпали две пятёрки, если известно, что сумма выпавших очков делится на 5.

Задача 7. Андрей бросил монетку 10 раз. Найдите вероятность того, что при последнем броске выпал «орёл», при условии, что 9 предыдущих раз выпала «решка».

Задача 8. Вероятность попадания в цель при отдельном удавшемся выстреле равна 0,2. Какова вероятность поразить цель, если в 2% случаев выстрел не происходит из-за осечки?

Задача 9°. (*Формула полной вероятности*) **а)** Докажите, что если $0 < P(B) < 1$, то для любого события A справедливо равенство $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$.
б) Докажите, что если $\Omega = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, причём для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполнено $P(B_i) > 0$ и для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$ выполнено $P(B_iB_j) = 0$, то $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n)$.

1 а	1 б	1 в	1 г	1 д	1 е	2 а	2 б	2 в	3 а	3 б	3 в	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	5 а	5 б	5 в	6	7	8	9 а	9 б

Задача 10°. (*Формула Байеса*) В условиях задачи 9 докажите, что для любого k выполнено

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

Задача 11. В мешке лежали 1 белый и 1 чёрный шар. Сначала Вася извлёк из мешка 1 шар и положил в пустой ящик. Затем Даня положил в ящик ещё 1 белый шар. Наконец, к ящику подошёл Кирилл и достал оттуда 1 шар, который оказался белым. Какова вероятность того, что оставшийся в ящике шар тоже белый?

Задача 12. Учёные разработали новый способ диагностики воспаления хитрости. Он имеет чувствительность 99% (т.е. верно диагностирует больного в 99% случаев) и специфичность 99% (лишь 1% здоровых людей объявляет больными). Известно, что в Одном Большом ВУЗе воспалением хитрости страдает 1 студент из 1000. Какова вероятность того, что студент этого ВУЗа, объявленный больным по результатам теста, действительно болен?

Задача 13. В одной урне содержится 1 белый и 2 чёрных шара, а в другой урне — 2 белых и 3 чёрных шара. В третью урну кладут два шара, случайно выбранных из первой урны, и два шара, случайно выбранных из второй. Какова вероятность того, что шар, извлечённый из третьей урны, будет белым?

Задача 14. У Серёжи в кармане 5 монет: 2 с двумя «орлами», 1 с двумя «решками» и 2 нормальные.

а) Серёжа закрывает глаза, достает наугад монету из кармана и подкидывает её. Найдите вероятность того, что нижняя сторона упавшей монеты — «орёл».

б) Открывая глаза, Серёжа видит, что сверху «орёл». Какова вероятность того, что и снизу «орёл»?

в) Серёжа снова закрывает глаза и подкидывает монету ещё раз. Какова вероятность того, что и теперь нижняя сторона — «орёл»?

г) Серёжа открывает глаза и видит, что сверху «орёл». Какова вероятность того, что снизу «орёл»?

Задача 15. Саша сдаёт тест. На очередную задачу имеется k вариантов ответа. Саша либо умеет решать задачу, и тогда она с определённостью находит правильный ответ, либо она не умеет её решать, и тогда выбирает ответ наугад. Считая, что Саша умеет решать задачу с вероятностью p, найдите вероятность того, что она умела решать задачу, коль скоро полученный ответ оказался верным.

Задача 16. Саша хочет встретить Новый Год с друзьями. Папа предлагает ему следующее:

— До Нового Года есть ещё три дня. Давай поступим так: в эти три дня мы с мамой будем по очереди играть с тобой в шахматы, по одной партии в день. С кем играть сегодня, выбираешь ты. Если выиграешь 2 партии подряд — сможешь праздновать, где хочешь.

С мамой или папой стоит сыграть Саше сегодня, если известно, что папа играет лучше мамы?

Задача 17*. Соня бросила монету 10 раз, а Василиса — 11 раз. Какова вероятность того, что у Сони монета упала «орлом» вверх меньшее число раз, чем у Василисы?

Задача 18*. (*Сумасшедшая старушка*) Каждый из n пассажиров купил билет на n-местный самолёт. Первой зашла сумасшедшая старушка и села на случайное место. Далее, каждый вновь входящий занимал своё место, если оно было свободно, а иначе — случайное. Какова вероятность того, что последний пассажир занял своё место?

Задача 19*. (*Задача о разорении*) Игрок, имеющий n монет, играет против казино, имеющего неограниченное количество монет. За одну партию игрок либо проигрывает монету, либо выигрывает с вероятностью 1/2. Игра продолжается до тех пор, пока игрок не разорится. Найдите вероятность разориться ровно за m игр.

10	11	12	13	14 а	14 б	14 в	14 г	15	16	17	18	19