

[illegible]

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$.

в) Сформулируйте (в т.ч. на языке кванторов) следующее определение: предел функции f при x , стремящемся к x_0 , равен ∞ (соответственно, $+\infty$, $-\infty$). Обозначение: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Задача 9. Пусть функция f не обращается в ноль в некоторой окрестности точки x_0 . Докажите, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Задача 10°. (*Арифметика пределов*) Пусть области определения функций f и g совпадают, причём $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ (возможно, $x_0 = \infty$). Докажите, что: а) $\forall c \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = ca$;

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab; \quad \text{г) } \text{если } b \neq 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Задача 11°. (*Принцип двух милиционеров*) Пусть области определения функций f , g и h совпадают, и для любого x из некоторой окрестности точки x_0 выполнены неравенства $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$, то существует предел функции g в точке x_0 , причём $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x^4}{3x^2 + x^4}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x^4}{3x^2 + x^4}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

в) А если вместо этого известно, что $g(b) = c$?

Задача 15*. Пусть области определения функций f и g совпадают, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ и при этом $a > 0$ (возможно, $x_0 = \infty$). Докажите, что тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = a^b$.

Задача 17*. Существует ли функция, определённая на M и имеющая в каждой точке бесконечный предел, если а) $M = \mathbb{Q}$; б) $M = \mathbb{R}$?

[illegible]