Определение 1. *Графом* называется множество точек на плоскости, некоторые пары которых соединены линиями. Эти точки называются *вершинами* графа, а линии — его *рёбрами.* Ребро, соединяющее вершину саму с собой, называется *петлёй.* Рёбра, соединяющие одну и ту же пару вершин, называются *параллельными* или *кратными.* Говорят, что граф *простой,* если в нём нет петель и кратных рёбер. Обычно мы будем рассматривать простые графы, множество вершин которых конечно.

Прочитав условие очередной задачи, спросите себя: что это значит с точки зрения графов?

Задача 1. Пусть простой граф имеет n вершин, причём каждая пара вершин соединена ребром (такие графы называются *полными).* Сколько графов можно получить из него, стирая некоторые рёбра?

Задача 2. Докажите, что из любых шести человек можно выбрать либо трёх попарно знакомых, либо трёх попарно незнакомых.

Задача 3. **а)** В углах доски 3×3 стоят кони: в верхних углах белые, а в нижних — чёрные. Как согласно шахматным правилам поменять белых и чёрных коней местами за наименьшее число ходов?
б) Решите ту же задачу для доски 3×4 (между конями одного цвета одна клетка).
в) Можно ли обойти доску 3×4 ходом шахматного коня, побывав в каждой клетке по одному разу и вернувшись в исходную клетку?

Определение 2. *Степенью* $\deg V$ вершины V называется число выходящих из неё рёбер (при этом каждая петля учитывается дважды).

Задача 4. В городе NN всего n телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с m другими, если **а)** $m = 3$, $n = 6$; **б)** $m = 4$, $n = 6$; **в)** $m = 4$, $n = 7$; **г)** $m = 5$, $n = 7$; **д)** m и n — произвольные натуральные числа?

Задача 5. Докажите, что в любом городе число людей, у которых нечётное количество знакомых, живущих в этом городе, является чётным.

Задача 6. **а)** Докажите, что в любом классе найдётся два школьника, имеющих одинаковое количество друзей среди одноклассников.
б) У Пети 24 одноклассника, причём все они имеют различное число друзей в классе. Сколько из них дружит с Петей?

Задача 7. Докажите, что в любой момент футбольного турнира в один круг (каждая команда играет с каждой по одному разу) найдётся две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей.

Задача 8. **а)** Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдётся две грани с одинаковым числом сторон. **б)*** Верно ли это утверждение для невыпуклых многогранников?

Определение 3. *Путь* в графе — это последовательность вершин $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$, в которой каждые две соседние вершины соединены ребром. Последовательность рёбер V_1V_2, V_2V_3, $\ldots$, V_nV_{n+1} также называют *путём.* Если $V_1 = V_{n+1}$, то путь называется *циклическим,* если при этом все рёбра пути различны — *циклом,* а если ещё и все вершины, кроме V_1 и V_{n+1}, разные — *простым циклом.* Граф называется *связным,* если любые две его вершины можно соединить путём.

Задача 9. Пусть в связном графе n вершин. Докажите, что
а) этот граф содержит не менее $(n-1)$ ребра; **б)** в нём $(n-1)$ ребро если и только если он перестаёт быть связным после удаления любого ребра (такие графы называются *деревьями);*
в) в нём $(n-1)$ ребро тогда и только тогда, когда этот граф не содержит циклов.

Задача 10. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковёр-самолёт. Из столицы выходит 57 ковролиний, с Кудыкиной Горы — всего одна, а из всех остальных городов — по 40. Докажите, что из столицы можно долететь до Кудыкиной Горы (возможно, с пересадками).

Задача 11. Сколько рёбер может быть в простом несвязном графе с n вершинами?

1	2	3 а	3 б	3 в	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	5	6 а	6 б	7	8 а	8 б	9 а	9 б	9 в	10	11

Задача 12. В метрополитене города M можно добраться с любой станции до любой другой. Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через неё так, чтобы с любой из оставшихся станций по-прежнему можно было проехать на любую другую.

Задача 13. а) На танцы пришли n девушек и n юношей. Каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Докажите, что собравшихся можно разбить на n смешанных пар так, чтобы в каждой паре юноша и девушка были знакомы.
б) Докажите, что число таких разбиений является степенью двойки.

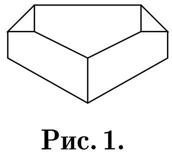

Рис. 1.

Задача 14. Хулиган Тишка решил прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз. Сможет ли Тишка это сделать, если парк имеет вид как на рис. 1.

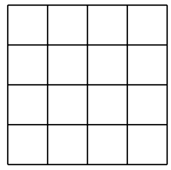

Рис. 2.

Задача 15. Можно ли составить проволочную решётку, изображённую на рис. 2,
а) из пяти ломаных длины 8; **б)** из восьми ломаных длины 5?

Задача 16. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 всеми возможными способами так, чтобы любое число, составленное из двух соседних цифр, делилось на 7 или на 13.

Задача 17. Докажите, что в связном графе есть цикл, содержащий все рёбра, тогда и только тогда, когда степень любой вершины графа четна (такие графы называются *эйлеровыми).*

Задача 18*. Гриша забыл трёхзначный код своего замка́. Замо́к открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если ранее были набраны другие цифры). Докажите, что набирая по одной цифре в секунду, Гриша сможет открыть замо́к не более чем за 1002 секунды.

Задача 19*. (*Теорема Холла*) В некоторой компании n юношей. Известно, что при каждом k, удовлетворяющем условию $1 \leqslant k \leqslant n$, верно следующее утверждение: для любых k юношей в компании число девушек, знакомых хотя бы с одним из этих k юношей, не меньше k. Докажите, что можно женить всех юношей на знакомых им девушках.

Задача 20*. На олимпиаде каждый из n школьников решил ровно 5 задач, причём каждую задачу решило ровно 5 школьников. Докажите, что можно организовать разбор задач таким образом, чтобы каждый школьник рассказал какую-то из решённых им задач и каждая задача была рассказана ровно один раз.

Задача 21*. Докажите, что среди любых 50 человек найдутся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.

12	13 а	13 б	14	15 а	15 б	16	17	18	19	20	21

Примечание. Истоки теории графов как раздела математики восходят к середине XVIII века. Основы этой теории в 1736 году заложил блестящий российский математик швейцарского происхождения Леона́рд Э́йлер (1707-1783 гг.), рассматривая задачу о кёнигсбергских мостах. Легенда гласит, что когда учёный гостил в Кёнигсберге (ныне Калининград), горожане предложили ему следующую задачу: пройти по всем мостам и вернуться в начальную точку, побывав на каждом мосту ровно один раз. После безуспешной попытки совершить нужный обход, Эйлер начертил упрощённую схему мостов и доказал, что сделать требуемое невозможно.

Одной из самых знаменитых задач теории графов стала так называемая *проблема четырёх красок*. Впервые она была сформулирована в 1852 году английским студентом Фрэ́нсисом Гу́три, и заключается вот в чём: верно ли, что всякую географическую карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета. Убедиться в справедливости этого утверждения человечество смогло лишь в 1976 году, когда Ке́ннет Аппе́ль и Во́льфганг Ха́кен решили задачу с помощью компьютера. Несмотря на последующие упрощения, и по сей день доказательство практически невозможно проверить, не используя технические средства, из-за чего определённая часть учёных относится к нему с недоверием.