Листок №22 **Определённый интеграл** 10.2016

Определение 1. *Разбиением отрезка* $[a;b]$ называется всякий конечный набор точек $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, удовлетворяющий условию $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Разность $x_i - x_{i-1}$ обозначается Δx_i.

Определение 2. Пусть σ — некоторое разбиение отрезка $[a;b]$, f — ограниченная на $[a;b]$ функция. Положим $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Числа $s_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ и $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ называются соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу* функции f при разбиении σ.

Задача 1. Объясните геометрический смысл верхней и нижней сумм Дарбу и сделайте соответствующие иллюстрации в следующих случаях:
а) $f(x) = x$ на отрезке $[0;1]$ при разбиении $\sigma = \{i/4 \mid i = 0, \ldots, 4\}$;
б) $f(x) = (x-1)^2$ на отрезке $[0;2]$ при разбиении $\sigma = \{i/4 \mid i = 0, \ldots, 8\}$.

Задача 2. Можно ли исключить из определения 2 условие ограниченности функции f на отрезке $[a;b]$?

Задача 3. Найдите нижние и верхние суммы Дарбу при разбиении $\sigma = \{i/n \mid i = 0, \ldots, n\}$ отрезка $[0;1]$ для **а)** $f(x) = x$; **б)** $f(x) = x^2$; **в)** $f(x) = \sin(\pi n x)$; **г)*** $f(x) = \sin(\pi x)$.

Задача 4. Что происходит с суммами Дарбу при добавлении к разбиению новых точек?

Задача 5. Докажите, что любая верхняя сумма Дарбу ограниченной на отрезке $[a;b]$ функции f не меньше любой нижней суммы Дарбу той же функции на этом же отрезке.

Задача 6. Докажите, что для всякой ограниченной на отрезке $[a;b]$ функции f корректно определены величины $I_* = \sup s_\sigma$ и $I^* = \inf S_\sigma$, где супремум и инфимум берутся по всем разбиениям σ отрезка $[a;b]$. Сравните их между собой.
Замечание. Числа I_* и I^* называются соответственно *нижним и верхним интегралами Дарбу* функции f на отрезке $[a;b]$.

Задача 7. Найдите I_* и I^* для **а)** $f(x) = x$ на $[0;1]$; **б)** $f(x) = x^2$ на $[0;1]$;
в) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ на отрезке $[a;b]$; **г)*** $f(x) = \sin(\pi x)$ на $[0;1]$.

Определение 3. Функция f называется *интегрируемой (по Риману)* на отрезке $[a;b]$, если она ограничена на этом отрезке и $I_* = I^*$. Число $I_* = I^*$ называется *определённым интегралом (Римана)* функции f на отрезке $[a;b]$. Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.
Множество интегрируемых на отрезке $[a;b]$ функций обозначается $\mathcal{R}[a;b]$.

Задача 8. Сформулируйте определение 3 при помощи кванторов.

Задача 9. Верно ли, что всякая ограниченная на отрезке функция интегрируема на нём?

Задача 10. Докажите, что если функция f ограничена, то $I_* = I^* \iff \inf\limits_{\sigma}(S_\sigma - s_\sigma) = 0$.

Задача 11. (*Линейность интеграла*) Докажите, что если $f, g \in \mathcal{R}[a;b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то функция $\alpha f + \beta g$ также будет интегрируема на $[a;b]$, причём

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 12. **а)** Докажите, что интеграл от неотрицательной функции неотрицателен.
б) Верно ли, что если интеграл функции равен нулю, то и функция тождественно равна нулю?
в) А если функция неотрицательна? **г)** А если функция неотрицательна и непрерывна?
д)* Верно ли, что интеграл от строго положительной функции строго больше нуля?

1 а	1 б	2	3 а	3 б	3 в	3 г	4	5	6	7 а	7 б	7 в	7 г	8	9	10	11	12 а	12 б	12 в	12 г	12 д

Задача 13. Докажите, что если $f, g \in \mathcal{R}[a;b]$ и для всех $x \in [a;b]$ выполнено $f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 14. Докажите, что если $f \in \mathcal{R}[a;b]$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Задача 15. Докажите, что

а) если $f \in \mathcal{R}[a;b]$, то $|f| \in \mathcal{R}[a;b]$ и выполнено неравенство $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$;

б) если $f \in \mathcal{R}[a;b]$, то $f^2 \in \mathcal{R}[a;b]$; **в)** если $f, g \in \mathcal{R}[a;b]$, то $fg \in \mathcal{R}[a;b]$.

г)* Пусть $f, g\colon [0;1] \to [0;1]$ и $f, g \in \mathcal{R}[0;1]$. Верно ли, что $f \circ g \in \mathcal{R}[0;1]$?

Задача 16. (*Аддитивность интеграла*) Пусть $a < c < b$. Докажите, что $f \in \mathcal{R}[a;b]$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{R}[a;c]$ и $f \in \mathcal{R}[c;b]$, причём

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Задача 17. Вычислите: **а)** $\int\limits_{-1}^{2} x\,dx$; **б)** $\int\limits_{-2}^{1} |x|\,dx$; **в)** $\int\limits_{0}^{2} x^2\,dx$; **г)** $\int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 3x + 1)\,dx$.

Задача 18. Докажите, что монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Определение 4. Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве M, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любых $x, y \in M$ таких, что $|x-y| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Задача 19. Докажите, что любая равномерно непрерывная функция является непрерывной.

Задача 20. Верно ли, что функция $f(x) = 1/x$ является равномерно непрерывной на множестве
а) $M = (0;1)$; **б)** $M = (1;+\infty)$?

Задача 21. Верно ли, что функция f является равномерно непрерывной на своей области определения, если **а)** $f(x) = x^2$; **б)** $f(x) = \sqrt{x}$; **в)** $f(x) = \sin x$?

Задача 22. (*Теорема Кантора*) Докажите, что непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке. Будет ли верным аналогичное утверждение для интервала, луча или прямой?

Задача 23. Докажите, что непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём.

Задача 24. Докажите интегрируемость на отрезке

а) ограниченной функции с конечным числом точек разрыва;

б) функции Римана $f(x) = \begin{cases} 1/n, & x = m/n \in \mathbb{Q},\ (m,n) = 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;

в)* ограниченной функции со счётным числом точек разрыва.

13	14	15 а	15 б	15 в	15 г	16	17 а	17 б	17 в	17 г	18	19	20 а	20 б	21 а	21 б	21 в	22	23	24 а	24 б	24 в

Примечание. Одним из первых прообразов вычисления интегралов является *метод исчерпывания*, разработанный Евдо́ксом Кни́дским (ок. 408-ок. 355 гг. до н.э.) и блестяще использовавшийся Архимедом (287-212 гг. до н.э.) для вычисления площадей и объёмов различных фигур. В средние века его сменил *метод неделимых*, наибольший вклад в обоснование которого внёс Бонавенту́ра Франче́ско Кавалье́ри (1598-1647 гг.). Основам *интегрального исчисления* мы обязаны Исааку Ньютону (1642-1727 гг.) и Го́тфриду Ви́льгельму Ле́йбницу (1646-1716 гг.). А современное обозначение определённого интеграла было впервые предложено в 1819-1820 гг. Жаном Бати́стом Жозе́фом Фурье́ (1768-1830 гг.).