Определение 1. Говорят, что подмножество M упорядоченного поля F *ограничено сверху* (*снизу*), если существует такой элемент C, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $x \leqslant C$ ($x \geqslant C$). Число C в этом случае называется *верхней* (*нижней*) *гранью* множества M.

Формально: $\exists C \in F \ \forall x \in M : x \leqslant C$ ($x \geqslant C$).

Задача 1. Верно ли, что множество положительных чисел P ограничено **а)** сверху; **б)** снизу?

Определение 2. Говорят, что подмножество M упорядоченного поля F *ограничено*, если оно ограничено сверху и снизу одновременно.

Определение 3. *Модулем* (*абсолютной величиной*) элемента a упорядоченного поля F называется элемент $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

Задача 2. **а)** Сформулируйте без отрицания (в т.ч. на языке кванторов): "Подмножество M упорядоченного поля F не является ограниченным сверху (снизу)".
б) Докажите, что подмножество M упорядоченного поля F ограничено тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: $\exists C \in F \ \forall x \in M : |x| \leqslant C$.

Определение 4. Элемент C упорядоченного поля F называется *точной верхней гранью* множества M, если выполняются условия:

1) $\forall x \in M : x \leqslant C$;
2) $\forall C_1 < C \ \exists x \in M : x > C_1$.

Условие 2) иногда бывает удобнее записать в следующей форме: 2') $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M : x > C - \varepsilon$.

Обозначение: $C = \sup M$ (читается: *супре́мум*).

Определение 5. Элемент C упорядоченного поля F называется *точной верхней гранью* множества M, если C есть наименьшая из всех верхних граней множества M.

Задача 3°. Докажите эквивалентность определений 4 и 5.

Задача 4°. Сформулируйте два определения точной нижней грани подмножества M упорядоченного поля F и докажите их эквивалентность.

Замечание. Обозначение для точной нижней грани: $\inf M$ (читается: *инфи́мум*).

Задача 5. Может ли у множества быть более одной точной верхней (нижней) грани?

Задача 6. Найдите точные нижнюю и верхнюю грани множества M, если:
а) $M = \{1/a \mid a > 2\}$; **б)** $M = \{a+b \mid -5 < a \leqslant 3, |b| < 1\}$; **в)** $M = \{ab \mid -5 < a \leqslant 3, |b| < 1\}$.

Задача 7. Докажите, что не существует такого $q \in \mathbb{Q}$, что $q^2 = 2$.

Задача 8. Докажите, что множество $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 3\}$ не имеет в $\mathbb{Q}$ точной верхней грани.

Определение 6. Упорядоченное поле F называется *полным*, если выполнена *аксиома о точной верхней грани*: всякое непустое ограниченное сверху подмножество M поля F имеет в F точную верхнюю грань.

Определение 7. Полное упорядоченное поле называется *полем действительных чисел*. Обозначение: $\mathbb{R}$. Множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ называется множеством *иррациональных чисел*.

Задача 9°. Докажите, что всякое непустое ограниченное снизу подмножество поля $\mathbb{R}$ имеет в $\mathbb{R}$ точную нижнюю грань.

1 а	1 б	2 а	2 б	3	4	5	6 а	6 б	6 в	7	8	9

Задача 10. Докажите, что множество иррациональных чисел непусто.

Задача 11. Пусть множества $A, B \subset \mathbb{R}$ ограничены и непусты. Докажите, что:
а) $\sup\{a+b \mid a \in A,\ b \in B\} = \sup A + \sup B$; **б)** $\inf\{a+b \mid a \in A,\ b \in B\} = \inf A + \inf B$;
в) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$; **г)** $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;
д) $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$, если $A \cap B \neq \emptyset$.

Задача 12°. (*Аксиома Архимеда*). Докажите, что для любого числа $a \in \mathbb{R}$ найдётся такое число $n \in \mathbb{N}$, что $n > a$.

Задача 13. Докажите, что между любыми двумя различными числами из $\mathbb{R}$ найдётся:
а) бесконечно много рациональных чисел; **б)** бесконечно много иррациональных чисел.

Задача 14°. (*Теорема о разделяющем числе*). Пусть A и B — такие два непустых подмножества поля $\mathbb{R}$, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ справедливо неравенство $a \leqslant b$. Докажите, что:
а) существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что при всех $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $a \leqslant c \leqslant b$;
б) разделяющее число c, о котором идёт речь в пункте а), единственно тогда и только тогда, когда для любого положительного ε найдутся такие $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$, что $b_0 - a_0 < \varepsilon$.

Задача 15°. (*Принцип вложенных отрезков*). Пусть дана последовательность вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset [a_4, b_4] \supset \ldots$ Докажите, что: **а)** пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ не пусто;
б) это пересечение состоит из одной точки тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Задача 16°. Докажите, что в упорядоченном поле F аксиома о точной верхней грани эквивалентна
а) теореме о разделяющем числе; **б)** аксиоме Архимеда и принципу вложенных отрезков.

Задача 17°. (*Компактность отрезка*). Докажите, что если отрезок покрыт некоторым множеством интервалов, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 18*. Докажите, что поле действительных чисел $\mathbb{R}$ **а)** не является счётным;
б) равномощно множеству всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц.

10	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	12	13 а	13 б	14 а	14 б	15 а	15 б	16 а	16 б	17	18 а	18 б

Примечание. Утверждение задачи 16 означает, что для построения поля действительных чисел можно взять несколько другой набор аксиом, нежели в определении 7, — получится тот же самый объект. Именно, полем действительных чисел можно назвать упорядоченное поле, в котором аксиоматически выполнена теорема о разделяющем числе. Или упорядоченное поле, в котором справедливы аксиома Архимеда и принцип вложенных отрезков.

Отметим следующий важный момент. Аксиома для нас — это вовсе не то, что всегда верно и принимается без доказательства (вспомните задачу 12). Аксиома — это некоторое утверждение, которому может удовлетворять или не удовлетворять данная модель. Так, поле действительных чисел удовлетворяет принципу вложенных отрезков, а поле рациональных чисел — нет. С этой точки зрения утверждение задачи 16 заключается в том, что аксиоме о точной верхней грани и теореме о разделяющем числе (как аксиоме) удовлетворяют одни и те же модели.

Строгое построение теории действительных чисел относится ко второй половине XIX-го века. Первопроходцем в этой области был Ю́лиус Дедеки́нд (1831–1916 гг.), его теория базировалась на теореме о разделяющем числе. Другие подходы были разработаны чуть позже Карлом Ве́йерштрассом (1815–1897 гг.) и Гео́ргом Ка́нтором (1845–1918 гг.) — в основе их построений лежат десятичные дроби и фундаментальные последовательности соответственно. Но более подробно об этом мы поговорим позднее.