Определение 1. Множество E называется *линейно упорядоченным*, если на нём задано отношение «меньше или равно» (то есть известно, для каких $a, b \in E$ выполнено неравенство $a \leqslant b$), причём выполнены следующие *аксиомы порядка*:

(O1) Для любых $a, b \in E$ выполнено $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$ (*линейная упорядоченность*).

(O2) Для любого $a \in E$ выполнено неравенство $a \leqslant a$ (*рефлексивность*).

(O3) Если $a, b \in E$, $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$ (*антисимметричность*).

(O4) Если $a, b, c \in E$, $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$ (*транзитивность*).

Вместо $a \leqslant b$ пишут также $b \geqslant a$, а запись $a < b$ (или $b > a$) означает, что $a \leqslant b$ и $a \neq b$.

Задача 1. Опишите все отношения линейного порядка на множестве $M = \{x, y, z\}$.

Задача 2. Верно ли, что все условия в определении 1 существенны?

Задача 3°. Докажите, что если E — линейно упорядоченное множество, то для любых $a, b \in E$ выполнено ровно одно из трёх утверждений: $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Определение 2. Поле F называется *упорядоченным полем*, если множество F линейно упорядочено, причём выполнены следующие аксиомы:

(AO) Если $a, b, c \in F$ и $a \leqslant b$, то $a + c \leqslant b + c$ (*связь порядка и сложения*).

(MO) Если $a, b, c \in F$, $0 \leqslant c$ и $a \leqslant b$, то $a \cdot c \leqslant b \cdot c$ (*связь порядка и умножения*).

Задача 4°. Пусть F — упорядоченное поле. Докажите, что:

а) если $a \geqslant b$ и $c \geqslant d$, то $a + c \geqslant b + d$; **б)** если $a \geqslant b \geqslant 0$ и $c \geqslant d \geqslant 0$, то $a \cdot c \geqslant b \cdot d \geqslant 0$;
в) если $a \geqslant b$, то $-a \leqslant -b$; **г)** если $a \geqslant b > 0$, то $1/a \leqslant 1/b$; **д)** $1 > 0$.

Задача 5. Пусть F — упорядоченное поле. Верно ли, что:

а) если $a \geqslant b$ и $c \geqslant d$, то $a - c \geqslant b - d$; **б)** если $a \geqslant b \geqslant 0$ и $c \geqslant d \geqslant 0$, то $a/c \geqslant b/d \geqslant 0$;
в) если $a \geqslant b$ и $c \leqslant 0$, то $a \cdot c \leqslant b \cdot c$; **г)** если $a > b$, то $b - a < 0$?

Задача 6°. **а)** Пусть F — упорядоченное поле, а P — множество его *положительных* элементов, то есть $P \overset{\text{def}}{=} \{a \in F \mid a > 0\}$. Докажите, что выполнены следующие свойства:

(P1) Для любого $a \in F$ верно ровно одно из трёх утверждений: $a \in P$; $a = 0$; $-a \in P$.

(P2) Если $a, b \in P$, то $a + b \in P$ и $a \cdot b \in P$.

б) Пусть F — поле, $P \subset F$ — подмножество, удовлетворяющее условиям (P1) и (P2). Докажите, что поле F можно сделать упорядоченным так, что P будет множеством положительных элементов, причём отношение порядка $\leqslant$ однозначно определяется множеством P.

Задача 7. Является ли упорядоченным полем **а)** $\mathbb{Z}$; **б)** $\mathbb{Q}$; **в)** $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?

Задача 8. Докажите, что в любом упорядоченном поле бесконечно много элементов.

Задача 9*. Пусть F — упорядоченное поле. Рассмотрим множество рациональных функций от переменной x

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} \;\middle|\; P,\, Q \in F[x],\ Q \neq 0 \right\}$$

с естественными операциями сложения и умножения.

а) Проверьте, что $F(x)$ — это поле. **б)** Докажите, что поле $F(x)$ можно сделать упорядоченным.
в) Докажите, что поле $F(x)$ можно сделать упорядоченным двумя различными способами.

Напоминание. Здесь $F[x]$ обозначает множество многочленов с коэффициентами из поля F.

1	2	3	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	5 а	5 б	5 в	5 г	6 а	6 б	7 а	7 б	7 в	8	9 а	9 б	9 в

Определение 3. Подмножество A поля F называется *индуктивным*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

(I1) $1 \in A$.

(I2) Если $x \in A$, то $x + 1 \in A$.

Определение 4. Пересечение всех индуктивных подмножеств упорядоченного поля F называется *множеством натуральных чисел* (обозначение: $\mathbb{N}$).

Положим по определению: $2 \overset{\text{def}}{=} 1 + 1,\ 3 \overset{\text{def}}{=} 2 + 1,\ 4 \overset{\text{def}}{=} 3 + 1,\ 5 \overset{\text{def}}{=} 4 + 1,\ 6 \overset{\text{def}}{=} 5 + 1, \ldots$

Задача 10*. Докажите, что:

а) множество натуральных чисел непусто; **б)** все натуральные числа положительны.

Задача 11*. Сформулируйте и докажите принцип математической индукции.

Задача 12*. Докажите следующие утверждения. **а)** Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда $a + b \in \mathbb{N}$ и $ab \in \mathbb{N}$.
б) Пусть $a \in \mathbb{N}$ и $a \neq 1$. Тогда $a - 1 \in \mathbb{N}$. **в)** Пусть $a, b \in \mathbb{N}$ и $a > b$. Тогда $a - b \in \mathbb{N}$.

Задача 13*. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ между $n - 1$ и n нет натуральных чисел.

Задача 14*. (*Принцип наименьшего элемента*) Докажите, что любое непустое подмножество множества $\mathbb{N}$ имеет наименьший элемент.

Определение 5. Множество $\mathbb{Z} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ называется *множеством целых чисел.*

Определение 6. Множество $\mathbb{Q} \overset{\text{def}}{=} \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ называется *множеством рациональных чисел.*

Задача 15*. Можно ли на поле $\mathbb{Q}$ ввести порядок двумя различными способами?

Задача 16*. Докажите, что для каждого $C \in \mathbb{Q}$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $n \geqslant C$.

10 а	10 б	11	12 а	12 б	12 в	13	14	15	16

Примечание. Однажды известный немецкий математик Леопо́льд Кро́некер (1823-1891 гг.) произнёс фразу, ставшую впоследствии знаменитой: «Бог создал натуральные числа, всё остальное — дело рук человеческих». И правда, каждый из нас знает, что целые числа базируются на числах натуральных, а рациональные числа естественным образом получаются как отношение целых и натуральных. Действительные числа образовать сложнее, но вскоре нам удастся и это, а там уже не за горами будут комплексные числа.

Что такое натуральные числа — вопрос совсем не такой простой; отчасти он созвучен вопросу о том, что такое точка, прямая и плоскость в геометрии. Как и любое базовое понятие, натуральные числа встречаются практически везде; в частности, мы наблюдаем их во всех упорядоченных полях. Неслучайно программа обоснования математики, разработанная в начале XX века Дави́дом Ги́льбертом (1862-1943 гг.), предполагала, прежде всего, доказательство непротиворечивости арифметики. Однако, как было показано в 1931 году Куртом Гёделем (1906-1978 гг.), доказать её непротиворечивость невозможно.

При неформальном определении натуральных чисел существует две традиции. Первая, принятая, в частности, в России, возникает из подсчёта (нумерации) предметов (первый, второй, третий, ...). Вторая, популярная, например, во Франции, идёт от количества предметов (нет предметов, один предмет, два предмета, ...). К единому мнению, считать ли ноль натуральным числом, математики всего мира прийти не смогли.