Листок №11 Неравенства и оценки 05.2015

Задача 1. Что больше: **а)** 5^{15} или 15^5; **б)** 2^{100} или 10^{30}; **в)** 7^8 или 8^7; **г)** 3^{500} или 7^{300}?

Задача 2. **а)** Докажите, что $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$ при всех $a > 0$.
б) Найдите наименьшее значение выражения $a + \dfrac{9}{a}$ при $a > 0$.

Задача 3. Данное число x изменили не более, чем на 0,1. Могло ли при этом измениться более, чем на 10, значение **а)** x^2; **б)** $\sqrt{x}$?

Задача 4. Пусть десятичная запись натурального числа a состоит из n цифр, а десятичная запись числа a^3 состоит из m цифр.
а) Какие значения может принимать m при фиксированном значении n?
б) Может ли значение выражения $(n + m)$ оказаться равным 2015?

Задача 5. Вкладчик кладёт в банк 1000 рублей. В каком случае спустя 10 лет он получит больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы один раз в год или если банк начисляет (5/12)% один раз в месяц?

Задача 6. Описанный около круга квадрат разбили на 1000×1000 равных квадратиков и закрасили квадратики, не выходящие за пределы круга. Докажите, что площадь получившейся закрашенной фигуры составляет не менее 99% от площади всего круга.

Задача 7°. Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и при всех $a > 0$ выполняются неравенства
а) $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$; **б)** $(1 + a)^n \geqslant 1 + na + \dfrac{n(n-1)}{2}a^2$.
Какова связь этой задачи с неравенством Бернулли и биномом Ньютона?

Задача 8. Укажите такое натуральное $n > 1$, для которого
а) $(1,001)^n > 1000$; **б)** $(0,999)^n < 10^{-10}$; **в)** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0{,}01$; **г)*** $\sqrt[n]{n} < 1{,}001$.

Определение 1. Говорят, что данное неравенство выполнено *при всех достаточно больших* n или *при* n *много большем нуля*, если найдётся такое число k, что это неравенство выполнено при всех $n > k$. Обозначение: неравенство выполнено при $n \gg 0$.

Задача 9°. Докажите, что если $a > 1$, а $C \in \mathbb{R}$, то при $n \gg 0$ **а)** $a^n > C$; **б)** $a^n > Cn$.

Задача 10°. Пусть $P(x) = p_n x^n + \ldots + p_0$ и $Q(x) = q_m x^m + \ldots + q_0$ — многочлены степеней n и m соответственно, причем $n > m$ и $p_n, q_m > 0$. Докажите, что $P(x) > Q(x)$ при $x \gg 0$.

Задача 11. Докажите, что **а)** $2^n > n^{100}$ при $n \gg 0$;
б)° если $a > 1$, а k — произвольное натуральное число, то $a^n > n^k$ при $n \gg 0$.

Задача 12°. Докажите, что для любого числа a при $n \gg 0$ выполнено неравенство $n! > a^n$.

Задача 13. **а)** Докажите, что неравенство $n^n > 1000 \cdot n!$ выполнено при $n \gg 0$.
б)° Останется ли верным это неравенство, если 1000 заменить на произвольное число C?

Задача 14. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство:
а) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \geqslant \dfrac{1}{2}$; **б)** $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} < 1$.

Задача 15. Верно ли, что для любого числа C найдётся такое натуральное число n, что выполнено следующее неравенство: **а)** $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} \geqslant C$; **б)** $1 + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \geqslant C$?

1 а	1 б	1 в	1 г	2 а	2 б	3 а	3 б	4 а	4 б	5	6	7 а	7 б	8 а	8 б	8 в	8 г	9 а	9 б	10	11 а	11 б	12	13 а	13 б	14 а	14 б	15 а	15 б

Задача 16. Пусть $a, b > 0$, а $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что тогда $\dfrac{a^{n+1}}{b^n} \geqslant (n+1)a - nb$.

Задача 17. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено: **а)**$^\circ$ $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}$;
б)$^\circ$ $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n}$; **в)**$^\circ$ $2 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n} \leqslant 4$; **г)*** $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n} \leqslant 3$.

Задача 18*. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено: $\left(\dfrac{n}{4}\right)^n \leqslant n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

Задача 19*. (*Неравенство о средних*) Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Докажите, что
а) $\sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$; **б)** $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$;
в) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \dfrac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}$.

Задача 20*. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. При каких x и y оно достигается?

Задача 21*. Найдётся ли такое натуральное число n, что первыми девятью знаками после запятой в десятичной записи числа $\{\sqrt{n}\}$ будут цифры 987654321?

16	17 а	17 б	17 в	17 г	18	19 а	19 б	19 в	20	21

Примечание. Пусть имеется набор положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответственно. Тогда для любого ненулевого числа d можно определить *среднее степени* d согласно следующей формуле:

$$A_d(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^d + a_2^d + \ldots + a_n^d}{n}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Имеет смысл выделить важные частные случаи:

- $A_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ — *среднее арифметическое*;
- $A_{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \dfrac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}$ — *среднее гармоническое*;
- $A_2(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ — *среднее квадратическое.*

Кроме того, можно по непрерывности определить ещё три полезные величины (что именно означают эти слова, и как это делается строго, мы узнаем с вами несколько позже):

- $A_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ — *среднее геометрическое*;
- $A_{+\infty}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — *максимум*;
- $A_{-\infty}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — *минимум.*

Методами дифференциального исчисления можно доказать, что для любых чисел $d_1 > d_2$ выполнено *неравенство о средних*: $A_{d_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant A_{d_2}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. В частности, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\max(a_1, \ldots, a_n) \geqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}} \geqslant \min(a_1, \ldots, a_n).$$