Листок №6 **Комбинаторика — 2** 12.2014

Определение 1. Пусть n и k — целые неотрицательные числа. *Размещением из n элементов по k* называется упорядоченный набор из k различных элементов, выбранных из данных n элементов. *Сочетанием из n элементов по k* называется неупорядоченный набор из k различных элементов, выбранных из данных n элементов. Размещение из n элементов по n называется *перестановкой n элементов.*
Числа размещений и сочетаний из n элементов по k обозначаются A_n^k и C_n^k соответственно.

Задача 1°. Чему равны A_n^k, C_n^k и число перестановок n элементов?

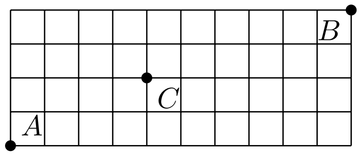


Рис. 1.

Задача 2. На рис. 1 изображён план города. На его улицах введено одностороннее движение таким образом, что можно ехать только «вправо» или «вверх». **а)** Сколько разных маршрутов ведёт из точки A в точку B?
б) Сколько из этих маршрутов не проходит через точку C?

Задача 3. **а)** Кузнечик умеет прыгать по прямой на 1 см влево или вправо. Сколькими способами он может оказаться на m см правее начальной точки, сделав ровно n прыжков?
б)* Кузнечик умеет прыгать по плоскости на 1 см вверх, вниз, влево или вправо. Сколькими способами он может оказаться в точке (m, k) через n прыжков, если сначала кузнечик находится в точке $(0, 0)$?

Доказывать тождества о числах сочетаний можно алгебраически, например, используя явные формулы и тождества вида $a^n a^m = a^{m+n}$, или комбинаторно, например, перечисляя подмножества с определёнными свойствами. Можно перевести это и на язык путей в треугольнике Паскаля, о котором пойдёт речь ниже.

Задача 4°. Докажите как алгебраически, так и комбинаторно, что если $k \leqslant m \leqslant n$, то:
а) $C_n^m = C_n^{n-m}$; **б)** $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$; **в)** $C_n^m \cdot C_m^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$. Что будет при $k = 1$?

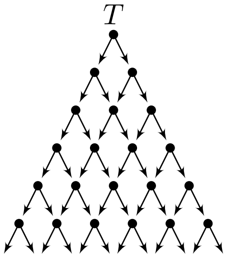


Рис. 2.

Определение 2. На месте каждой точки из рис. 2 напишем число путей, состоящих из стрелочек и ведущих из корня T в данную точку. Полученный числовой треугольник называется *треугольником Паскаля.*

Задача 5. **а)** Нарисуйте треугольник Паскаля до десятой строки включительно (нумерация мест и строк начинается с нуля). Как по $(n-1)$-ой строке найти n-ую строку?
б)° Докажите, что на k-м месте в n-ой строке стоит C_n^k.
в) Как изменятся числа в треугольнике Паскаля, если заменить пути, ведущие вправо-вниз, на пары таких же путей (рис. 3)?

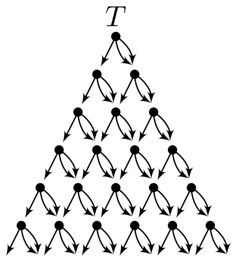


Рис. 3.

Задача 6°. (*Бином Ньютона*) Докажите, что

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Задача 7. **а)** На сколько нулей оканчивается число $11^{100} - 1$? **б)** Какое слагаемое будет максимальным в разложении по биному выражения $(57+1)^{2014}$?
в)* Найдите первые 57 знаков после запятой в десятичной записи числа $(2\sqrt{2}+3)^{100}$.

Задача 8. **а)** Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2014?
б) Докажите, что любое число, кроме единицы, встречается в треугольнике Паскаля конечное число раз.
в)* Пусть $n < 2^k$. Докажите, что число n встречается в треугольнике Паскаля не более, чем $2k - 2$ раз.

Задача 9. Раскрасьте чётные и нечётные числа в треугольнике Паскаля разными цветами.
а) В каких строках треугольника Паскаля все числа будут нечётными?
б) В каких строках все числа, кроме единиц по бокам, будут чётными?
в)* В каких строках все числа, кроме единиц, будут кратны данному простому числу p?

Задача 10. Меню в школьной столовой постоянно и состоит из n различных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому (за один раз он может съесть от 0 до n разных блюд).
а) Сколько дней ему удастся это делать? **б)** Сколько блюд он съест за это время?
в)* Вася решил последовать примеру Пети, но съедать каждый день нечётное число блюд. Сколько дней ему удастся это делать? **г)*** Сколько блюд Вася съест за это время?

Задача 11. Для каждого целого неотрицательного числа n вычислите значения следующих выражений:
а)° $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$; **б)°** $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$; **в)*** $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$.

Задача 12. Докажите как алгебраически, так и комбинаторно, что если $s \leqslant m + n$, то:
а) *(Свертка Вандермонда)* $C_m^0 C_n^s + C_m^1 C_n^{s-1} + C_m^2 C_n^{s-2} + \ldots + C_m^s C_n^0 = C_{n+m}^s$.
б) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

1	2 а	2 б	3 а	3 б	4 а	4 б	4 в	5 а	5 б	5 в	6	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	8 в	9 а	9 б	9 в	10 а	10 б	10 в	10 г	11 а	11 б	11 в	12 а	12 б

Задача 13. **а)** Выровняем треугольник Паскаля по левому краю (рис. 4). Чему равна сумма чисел на n-ой восходящей диагонали: $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + \ldots$?
б)* А чему равна знакопеременная сумма $C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - C_{n-3}^3 + \ldots$?

$$\begin{array}{llllll} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

Рис. 4.

Задача 14. **а)** Сколькими способами можно выбрать некоторые из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ так, чтобы среди них не было подряд идущих чисел (пустой набор учитывается)?
б) В скольких из этих наборов 1 и n не встречаются одновременно?

Задача 15°. **а)** Докажите, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + C_{n-2}^k + \ldots + C_k^k$ при $k \leqslant n$.
б) Выведите из пункта а) формулы для $1 + 2 + \ldots + n$ и $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$.

Задача 16*. (*Гармонический треугольник Лейбница*) Расположим на правой и левой сторонах треугольника последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, а в остальные ячейки поместим числа так, чтобы любое число являлось суммой двух стоящих под ним чисел: $L_n^0 = L_n^n = \frac{1}{n+1}$, $L_n^k = L_{n+1}^k + L_{n+1}^{k+1}$ (рис. 5). Найдите формулу, связывающую коэффициенты полученного треугольника с коэффициентами треугольника Паскаля.

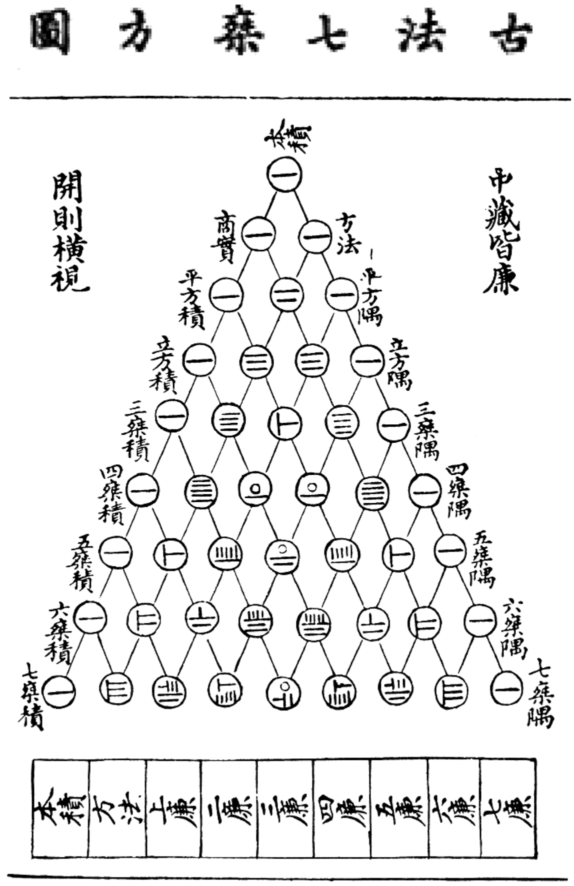
$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Рис. 5.

Задача 17. **а)** Сколько различных комбинаций букв можно получить, переставляя буквы слова ЕНИСЕЙ? **б)** А переставляя буквы слова МИССИСИПИ?
в) Вычислите коэффициент при $x^2 \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$ в разложении $(x + y + z + u + v)^6$ на подобные слагаемые.
г) Найдите коэффициенты $M_{(l_1,\ldots,l_k)}$ в разложении $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum\limits_{l_1+l_2+\ldots+l_k=n} M_{(l_1,\ldots,l_k)} x_1^{l_1} \cdot x_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{l_k}$.
д)* Придумайте и докажите формулы для коэффициентов $M_{(l_1,\ldots,l_k)}$, обобщающие формулы задач 4аб и 11а.

Замечание 1. Коэффициенты из задачи 17г называется *мультиномиальными* и обозначаются $\binom{n}{l_1,\ldots,l_k}$.

Задача 18*. Заметим, что формула для числа сочетаний, записанная в виде $C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$, имеет смысл для любых n, а не только для натуральных. Поэтому мы будем рассматривать C_x^k как многочлен k-ой степени от x. Кроме того, будем считать по определению, что $C_x^0 = 1$.
а) Покажите, что утверждение задачи 4б верно для любого n.
б) *(Форма Ньютона)* Докажите, что любой многочлен $f(x)$ степени не выше n можно разложить в сумму $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot C_x^k$.
в) Как по $f(x)$ найти коэффициенты a_k разложения из задачи 18б? Выведите явную формулу.
г) Как из задач 15а и 18бв вывести формулу для $1^k + 2^k + \ldots + n^k$?



Примечание. Поскольку комбинаторика призвана отвечать на вопрос «Сколько?» (чего бы то ни было и где бы то ни было), можно смело утверждать, что комбинаторные задачи интересовали человечество всегда. Идеи и методы подсчёта известны с незапамятных времён, упоминания о них имеются как у древних индийцев и китайцев, так и у древних греков и арабов. А отдельные сведения о биномиальных коэффициентах, биноме Ньютона и треугольнике Паскаля встречаются уже в трудах математиков XI–XIV веков.

Современный вид комбинаторика начала обретать в середине XVII века благодаря трудам Блеза Паска́ля (1623-1662 гг.) и Го́тфрида Ви́льгельма Ле́йбница (1646-1716 гг.). Сам термин «Комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем в книге «Рассуждения о комбинаторном искусстве» (1666 г.). Бином Ньютона поименован в честь Исаа́ка Нью́тона (1643-1727 гг.), который обобщил формулу из задачи 6 на рациональные показатели степени, рассмотрев бесконечные ряды. А «треугольник Паскаля» обязан своим названием Паскалю, подробно исследовавшему его в «Трактате об арифметическом треугольнике» (1654 г.), хотя, скажем, в Китае он известен как «треугольник Яна Хуэя» (изображение из манускрипта 1303 года можно увидеть на рисунке), а в Иране — как «треугольник Хайяма».

Открытая гипотеза Дэ́вида Сингма́стера (род. 1939 г.) утверждает, что существует такая константа K, что любое число $n > 1$ встречается в треугольнике Паскаля не больше, чем K раз. Например, число $3003 = C_{78}^2 = C_{15}^5 = C_{14}^6$ встречается 8 раз, и чи́сла, для которых это значение больше, неизвестны.

13 а	13 б	14 а	14 б	15 а	15 б	16	17 а	17 б	17 в	17 г	17 д	18 а	18 б	18 в	18 г