Листок №2д — **Геометрия на клетчатой бумаге** — 09.2014

На протяжении всего этого листочка мы будем иметь дело с клетчатой бумагой (сеткой, образованной семействами равноудалённых друг от друга горизонтальных и вертикальных прямых). Площадь каждой клетки для определённости будем считать равной 1. Рассматривать мы будем исключительно те многоугольники, вершины которых являются узлами сетки.

Задача 1. (*Правило параллелограмма*) Докажите, что если три вершины некоторого параллелограмма являются узлами сетки, то четвёртая его вершина — также узел сетки.

Задача 2. Докажите, что прямая, проходящая через два узла сетки, проходит через бесконечное количество узлов сетки, причём все расстояния между соседними узлами, лежащими на этой прямой, равны между собой.

Пусть дан многоугольник с вершинами в узлах сетки, S — его площадь, i — число узлов сетки, лежащих внутри него, b — число узлов сетки, лежащих на его сторонах (в том числе вершины). *Формулой Пика* называют следующее соотношение: $S = i + b/2 - 1$.

Задача 3. Докажите формулу Пика **а)** для прямоугольника со сторонами, лежащими на линиях сетки;
б) для прямоугольного треугольника с катетами, лежащими на линиях сетки.

Задача 4. Пусть имеется три многоугольника, один из которых составлен из двух других. Предположим, формула Пика выполняется для некоторых двух многоугольников из этих трёх. Докажите, что тогда она справедлива и для третьего многоугольника.

Задача 5. Докажите формулу Пика для произвольного треугольника.

Задача 6*. Докажите, что при $n > 3$ во всяком n-угольнике найдётся диагональ, принадлежащая ему целиком.

Замечание 1. Результатом задачи 6 далее можно пользоваться без доказательства.

Задача 7. Докажите, что всякий многоугольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы каждая диагональ принадлежала ему целиком.

Задача 8. Докажите формулу Пика для произвольного многоугольника.

Задача 9. Докажите, что если сторонам треугольника (не считая его вершин) не принадлежит ни один узел сетки, а внутри треугольника содержится ровно один узел, то этот узел является точкой пересечения медиан треугольника.

Определение 1. Треугольник (параллелограмм) с вершинами в узлах сетки называется *примитивным*, если внутри него и на его сторонах нет других узлов сетки.

Задача 10. **а)** Какие значения может принимать площадь примитивного треугольника?
б) Может ли примитивный треугольник иметь сколь угодно большой периметр?
в) Те же вопросы для примитивного параллелограмма.

Задача 11. Пусть A и B — узлы сетки, причём на отрезке AB нет других узлов. Докажите, что найдётся узел сетки C такой, что треугольник ABC является примитивным, причём если A и B не являются соседними узлами, то C можно выбрать так, чтобы угол ACB был тупым или прямым.

Задача 12. Докажите, что параллелограмм $ABCD$ является примитивным тогда и только тогда, когда всевозможные параллелограммы, полученные из $ABCD$ параллельными переносами, переводящими узел A в разные узлы сетки, покрывают плоскость и не накладываются друг на друга.

Задача 13. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно какого-либо другого кузнечика. Могут ли кузнечики в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера, нежели исходный?

Задача 14. Существует ли правильный n-угольник с вершинами в узлах сетки, если **а)** $n = 3$; **б)** $n = 6$?

Задача 15*. Для каких n существует правильный n-угольник с вершинами в узлах сетки?

Задача 16*. На плоскости провели много параллельных прямых на одинаковом расстоянии друг от друга («тетрадь в линейку»). Для каких n можно нарисовать правильный n-угольник так, чтобы все его вершины лежали на проведенных прямых?

Задача 17*. **а)** На плоскости расположена фигура площади 1. Докажите, что найдутся такие две точки A и B, принадлежащие этой фигуре, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет целочисленные координаты.
б) (*Теорема Минковского*) На плоскости расположена центрально-симметричная относительно начала координат выпуклая фигура площади 4. Докажите, что помимо начала координат эта фигура содержит по крайней мере ещё один узел сетки.

Задача 18*. Каждый узел клетчатой бумаги накрыли кругом, центр которого находится в этом узле, а радиус в 1 000 000 раз меньше ширины клетки. Можно ли из начала координат выпустить луч, не пересекающий ни одного круга, кроме того, который накрывает начало координат?

1	2	3 а	3 б	4	5	6	7	8	9	10 а	10 б	10 в	11	12	13	14 а	14 б	15	16	17 а	17 б	18

Примечание. Отдельные идеи дискретной геометрии (и в частности, геометрии на клетчатой бумаге) встречаются уже в первой половине XIX-го века в трудах «короля математиков» — Ка́рла Фри́дриха Га́усса (1777-1855 гг). Однако своим бурным развитием эти отрасли математики обязаны, прежде всего, немецкому математику Ге́рману Минко́вскому (1864-1909 гг), а также австрийцу Гео́ргу Алекса́ндру Пику (1859-1938 гг). «Геометрия чисел» Минковского возникла как результат применения в теории чисел геометрических понятий и методов, когда учёный исследовал взаимоотношения между выпуклыми множествами и целочисленными решётками в многомерном пространстве. Наиболее значительным достижением в этой области можно назвать теорему Минковского о выпуклом теле (задача 17б): *в замкнутом выпуклом множестве, симметричном относительно начала координат n-мерного пространства и имеющем объем $S \geqslant 2^n$, найдётся целочисленная точка, отличная от начала координат.*