Задача 1. **а)** Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$. Докажите, что существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из левой полуокрестности $f(x) < f(x_0)$, а для всех x из правой полуокрестности $f(x) > f(x_0)$.
б)* Верно ли, что такая функция f монотонно возрастает в некоторой окрестности точки x_0?

Задача 2°. (*Теорема Ферма*) Пусть функция f определена на интервале (a, b) и дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Докажите, что если в точке x_0 функция f принимает наибольшее или наименьшее значение на (a, b), то $f'(x_0) = 0$. Верно ли обратное?

Задача 3°. (*Теорема Ролля*) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$. Докажите, что найдётся такое $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Задача 4°. (*Теорема Лагранжа*) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Докажите, что в этом случае существует такое $c \in (a, b)$, что $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Каков геометрический смысл этого утверждения?

Задача 5. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Докажите, что если для всех $x \in (a, b)$ выполнено $f'(x) = 0$, то f постоянна на $[a, b]$.

Задача 6°. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b). Докажите, что f является неубывающей (невозрастающей) функцией на (a, b) тогда и только тогда, когда её производная на (a, b) неотрицательна (неположительна).

Задача 7. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b).
а)° (*Достаточное условие строгой монотонности*) Докажите, что если производная функции f на интервале (a, b) положительна (отрицательна), то f строго возрастает (убывает) на этом интервале.
б)* Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции f на интервале (a, b).

Задача 8. Докажите, что при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнены следующие неравенства:
а) $x^4 + x^3 \geqslant -\dfrac{3^3}{4^4}$; **б)** $x^6 - 6x + 5 \geqslant 0$; **в)** $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 \geqslant 0$.

Определение 1. Говорят, что $x_0 \in M$ — *точка локального максимума* (*минимума)* функции f, определённой на множестве M, если существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap M$ выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$ ($f(x_0) \leqslant f(x)$). Если при этом имеет место строгое неравенство $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$), то число x_0 называется точкой *строгого локального максимума* (*минимума*). Точки (строгого) локального максимума и минимума называются *точками* (*строгого*) *локального экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремумами.*

Задача 9°. **а)** (*Необходимое условие экстремума*) Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$. Докажите, что точками её локального экстремума могут быть только концы отрезка, а также точки интервала (a, b), в которых производная функции равна нулю или не существует.
б) (*Достаточное условие экстремума*) Пусть функция f непрерывна в точке x_0, дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0, и её производная меняет знак при переходе через точку x_0. Докажите, что точка x_0 является точкой строгого локального экстремума. При этом если знак производной меняется с минуса на плюс (с плюса на минус), то x_0 является точкой строгого локального минимума (максимума).

1 а	1 б	2	3	4	5	6	7 а	7 б	8 а	8 б	8 в	9 а	9 б

Задача 10. Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности $U_\varepsilon(x_0)$.
а) Может ли x_0 быть точкой локального экстремума функции f, если $\forall\, x \in \dot{U}_\varepsilon(x_0):\ f'(x) < 0$?
б)* Пусть x_0 — точка строгого локального минимума функции f. Найдётся ли такое δ, что $f'(x) < 0$ для всех $x \in \dot{U}^-_\delta(x_0)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in \dot{U}^+_\delta(x_0)$?

Задача 11. Найдите все точки локального экстремума следующих функций:
а) $x^{11}(1-x)^{12}$; **б)** $3x^4-4x^3-6x^2+12x-1$; **в)** $\sqrt{2x-x^2}$; **г)** $\sqrt{2x^2-x+2}$; **д)** $(2x-1)e^{3x}$.

Определение 2. Если существует производная $(f')'(x_0)$, то она называется *второй производной* (или *производной второго порядка*) функции f в точке x_0. Аналогично определяется *производная k-го порядка*. Обозначения: $f''(x_0)$, $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x_0)$, $f^{(k)}(x_0)$, $\dfrac{d^kf}{dx^k}(x_0)$.

Задача 12°. (*Достаточное условие экстремума*) Пусть в точке x_0 существуют производные $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$). Докажите, что в этом случае функция f имеет в точке x_0 строгий локальный максимум (минимум).

Задача 13. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $x + \dfrac{1}{x}$ на отрезке $[0{,}01; 90]$; **б)** $x + 2\sin x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$; **в)** $|x^2 - 3x + 2|$ на отрезке $[-10; 10]$;
г) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5x+11}}$ на отрезке $[-3; 3]$; **д)** $x^3 - 3x^2 - x + 4$ на отрезке $[-1{,}28; 3{,}3]$.

Задача 14. Какую наибольшую площадь может иметь трапеция, три стороны которой равны единице?

Задача 15. Из деревни Глухово, находящейся в лесу в 5 км от прямой дороги, путнику нужно попасть в село Крутое, расположенное на этой дороге в 13 км от Глухово. Известно, что наибольшая скорость пешехода на дороге составляет 5 км/ч, а в лесу — 3 км/ч. За какое наименьшее время путник сможет попасть из Глухово в Крутое?

Задача 16. Найдите точку параболы $y = x^2$, ближайшую к точке $(-1; 2)$.

Задача 17. Докажите, что для всех $x > 0$ выполнены неравенства: **а)** $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$;
б) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$; **в)** $\cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$; **г)** $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$, $(n \in \mathbb{N})$.

Задача 18*. При каких a, b многочлен $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + 1$ имеет кратный корень в $x = 1$?

Задача 19*. Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, и при $x \notin M$ существует и равна нулю производная $f'(x)$. Можно ли утверждать, что f постоянна, если множество M счётно?

Задача 20*. Пусть непрерывная функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$, причём $f(0) = f(1) = 0$ и $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 1$. Докажите, что найдётся такая точка $x_0 \in (0, 1)$, что $|f'(x_0)| > 2$.

Задача 21*. (*Теорема Дарбу*) Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b) и существуют правая производная $f'_+(a)$ и левая производная $f'_-(b)$. Докажите, что функция f' принимает на отрезке $[a, b]$ все промежуточные значения между $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$.

10 а	10 б	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	12	13 а	13 б	13 в	13 г	13 д	14	15	16	17 а	17 б	17 в	17 г	18	19	20	21