Определение 1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция f называется *дифференцируемой в точке* x_0, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (называемый *производной функции* f *в точке* x_0). Обозначения: $f'(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Задача 1. Докажите, что если функция f дифференцируема в точке x_0, то:
а) функция f является непрерывной в точке x_0; **б)** $f'(x_0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$.

Определение 2. Функция f называется *дифференцируемой на множестве* M, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. В этом случае функция $g:M\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)$ называется *производной функции* f *на множестве* M. Обозначения: f', $\dfrac{df}{dx}$.

Задача 2°. Пусть $n\in\mathbb{N}$. Найдите производные следующих функций:
а) c; **б)** x; **в)** x^2; **г)** $|x|$; **д)** $1/x$; **е)** $\sqrt{x}$; **ж)** x^n; **з)** $1/x^n$.

Задача 3°. (*Замечательные пределы*) Докажите, что:
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.
Замечание. Утверждение задачи 3а) называется *первым замечательным пределом.*
Утверждение задачи 3г) называется *вторым замечательным пределом.*

Задача 4°. Найдите производные следующих функций: **а)** $\sin x$; **б)** $\cos x$; **в)** e^x; **г)** $\ln x$.

Задача 5°. Пусть функции f и g дифференцируемы на множестве M. Докажите, что:
а) $(cf)'=cf'$ $(c\in\mathbb{R})$; **б)** $(f\pm g)'=f'\pm g'$; **в)** $(fg)'=f'g+fg'$;
г) если $g(x_0)\neq 0$, то $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Задача 6. Найдите производные следующих функций:
а) $2x^3+5x^2-3x+4$; **б)** $x^2+\dfrac{1}{x^3}$; **в)** $\dfrac{x^2+8x-15}{x+2}$; **г)°** $\operatorname{tg}x$; **д)°** $\operatorname{ctg}x$.

Задача 7. **а)** Дайте определения *левой и правой производных функции* f *в точке* x_0.
б) При каких a и b функция $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\leqslant x_0\\ ax+b, & \text{если } x>x_0\end{cases}$ дифференцируема на $\mathbb{R}$?
Замечание. Левая и правая производные обозначаются $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ соответственно.

Задача 8. Докажите, что $f'(x_0)=A$ тогда и только тогда, когда для некоторой функции $\alpha(t)$ *приращение* $f(x_0+t)-f(x_0)$ представимо в виде $At+\alpha(t)$, причём $\lim\limits_{t\to 0}\alpha(t)/t=0$.

Задача 9°. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$. Докажите, что композиция $h=g\circ f$ функций f и g дифференцируема в точке x_0, причём $h'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$.

Задача 10. Найдите производные следующих функций:
а) $(2x^2-5x+3)^{100}$; **б)** $\sqrt{1-x^2}$; **в)** $\dfrac{(3x+1)^2}{(2x-5)^3}$; **г)** $\dfrac{\cos(5x+2)-\operatorname{tg}(\ln x)}{e^{2x}}$;
д)* $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$; **е)*** $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$.

Задача 11. Пусть $a\in\mathbb{R}$, $b>0$, $c>0, c\neq 1$. Найдите производные следующих функций:
а)° x^a; **б)°** b^x; **в)°** $\log_c x$; **г)** e^{x^2}; **д)** x^x.

1 а	1 б	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	2 е	2 ж	2 з	3 а	3 б	3 в	3 г	4 а	4 б	4 в	4 г	5 а	5 б	5 в	5 г	6 а	6 б	6 в	6 г	6 д	7 а	7 б	8	9	10 а	10 б	10 в	10 г	10 д	10 е	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д

Задача 12°. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, и $f'(x_0) \neq 0$. Докажите, что в этом случае обратная к f функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причём $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Задача 13°. Найдите производные функций: **а)** $\arcsin x$; **б)** $\arccos x$; **в)** $\operatorname{arctg} x$; **г)** $\operatorname{arcctg} x$.

Определение 3. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Прямая $l(x) = kx + b$ называется *(наклонной) касательной к графику функции в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{l(x) - f(x)}{x - x_0} = 0$.

Задача 14°. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Докажите, что касательная к графику функции f в точке x_0 существует и единственна, а её уравнение имеет вид: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Задача 15. Пусть график функции f представляет собой дугу окружности. Совпадает ли определение 3 с определением касательной, известным нам из геометрии?

Задача 16. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x^7 - 10x}{x + 5}$ в точке с абсциссой 1.

Задача 17. Найдите уравнения касательных к параболе $y = x^2$, проходящих через точку
а) $(0, 0)$; **б)** $(2, 3)$; **в)** $(2, 1)$; **г)** $(1, 2)$.

Задача 18. Найдите уравнения общих касательных к параболам $y = 2x^2 - x + 5$ и $y = -x^2 + 7x - 1$.

Задача 19. Для каждой точки плоскости выясните, сколько касательных к графику функции f проходит через эту точку, если **а)** $f(x) = x^2$; **б)** $f(x) = x^n$; **в)*** $f(x) = x^7 - x$.

Задача 20*. Приведите пример функции, дифференцируемой ровно в одной точке.

Задача 21*. Докажите, что если периодическая функция имеет точку непрерывности, то либо эта функция постоянна, либо имеет наименьший положительный период.

Задача 22*. Пусть вершины треугольника ABC принадлежат графику параболы $y = x^2$. Докажите, что нормали в вершинах треугольника (то есть прямые, перпендикулярные касательным в этих вершинах) пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точка пересечений медиан треугольника ABC лежит на оси Oy.

Задача 23*. Найдите все непрерывные функции, которые при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию
а) $f(x + y) = f(x) + f(y)$; **б)** $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

Задача 24*. Существует ли функция, непрерывная на $\mathbb{R}$, но не дифференцируемая ни в одной точке?

12	13 а	13 б	13 в	13 г	14	15	16	17 а	17 б	17 в	17 г	18	19 а	19 б	19 в	20	21	22	23 а	23 б	24

Примечание. Официальной датой рождения дифференциального исчисления можно считать май 1684 года. Именно тогда Го́тфрид Ви́льгельм Ле́йбниц (1646-1716 гг.) опубликовал статью «Новый метод максимумов и минимумов», в которой кратко излагал принципы своего нового метода поиска экстремумов. Параллельно аналогичный метод был разработан Исаа́ком Нью́тоном (1642-1727 гг.); более того, имеются сведения, что последний открыл дифференциальное и интегральное исчисления ещё в 1665-1666 годах. Однако Ньютон публиковать свои открытия не торопился и сделал это только в 1704 году. Разгоревшийся после этого спор о приоритете не утихал до самой смерти Лейбница и, охарактеризованный как «наиболее постыдная склока во всей истории математики», очень повредил математическому сообществу в целом.

Отметим, что ни Ньютон, ни Лейбниц не давали определение производной через предел, оно появилось позже. Ньютон обозначал производную символом $\dot{x}$, Лейбниц писал df/dx. А обозначение f' было введено Жозе́фом Луи́ Лагра́нжем (1736-1813 гг.).