

ЗАДАЧИ О МНОГОЧЛЕНАХ

1. Если поле K конечно, то любая функция $f : K \times \cdots \times K \rightarrow K$ задаётся многочленом от n переменных.
2. Найдите многочлен 3-й степени f , для которого $f(1) = 3$, $f(2) = 7$, $f(-1) = -5$, $f(-2) = -21$.
3. Многочлен f степени $< n$ принимает в n последовательных целых числах целые значения. Докажите, что f принимает целые значения при любых целых значениях переменной.
4. Найдите НОД многочленов:
 - (a) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ и $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;
 - (b) $x^m - 1$ и $x^n - 1$.
5. Найдите:
 - (a) все неприводимые многочлены над \mathbf{Z}_2 степени 5;
 - (b) все неприводимые многочлены над \mathbf{Z}_3 степени ≤ 3 со старшим коэффициентом 1;
 - (c) число неприводимых многочленов над \mathbf{Z}_3 степени 4 со старшим коэффициентом 1.
6. Разложите на неприводимые множители над полем \mathbb{Q} многочлены:
 - (a) $2x^4 + 3x^3 + 5x - 3$;
 - (b) $x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5$.
7. Докажите неприводимость над полем \mathbb{Q} многочленов:
 - (a) $(x - a_1) \cdots (x - a_n) - 1$,
 - (b)* $(x - a_1)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$,где a_1, \dots, a_n — попарно различные целые числа.
8. С последовательностью чисел $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ проделывают следующую операцию: каждый член a_n заменяют на $a_{n+1} - a_n$. Докажите, что если $a_n = f(n)$, где f — некоторый многочлен, то применив эту операцию несколько раз, получим последовательность из одних нулей. Верно ли обратное?
9. Вычислите суммы:
 - (a) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$;
 - (b) $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$.