

## Многогранники и кривизна

**Задача 1.** Найдите сумму кривизн  $(n, k)$ -звезды, то есть  $n$ -конечной звезды, в которой вершины соединяются через каждые  $k$ , где  $n$  и  $k$  взаимно просты.

**Задача 2.** На круговой конус набросили петлю и потянули ее вниз (без трения). Если конус острый, то петля останется на конусе; если он достаточно тупоугольный, петля соскользнет. Найдите критическое значение угла конуса, разделяющее эти два случая.

**Задача 3.** На поверхности теннисного мячика нарисована кривая, делящая мяч на две части равной площади. Отметим на этой кривой точку и прокатим мяч по плоскости вдоль этой кривой, пока он не коснется плоскости в той же точке. Начальное и конечное положения мяча отличаются поворотом на некоторый угол. Чему равен этот угол?

**Определение.** *Стерadianной мерой телесного угла* многогранного конуса называется площадь фигуры, полученной в результате пересечения конуса со сферой единичного радиуса с центром в вершине конуса. (Сравните с определением радианной меры угла).

**Пример.** Стерadianная мера угла куба равна  $\pi/2$  (восемь таких углов замощают сферу, площадь которой равна  $4\pi$ ).

**Задача 4.** Для данного выпуклого многогранника  $P$  обозначим через  $S(P)$  сумму стерadianных мер телесных углов в его вершинах, а через  $D(P)$  — сумму его двугранных углов.

**а)** Пусть  $P$  — тетраэдр. Докажите, что  $S(P) - 2D(P) + 4\pi = 0$ .

**Подсказка.** Параллельно перенесите все грани тетраэдра в начало координат и рассмотрите разбиение единичной сферы полупространствами, содержащими грани. Далее используйте формулу включений и исключений.

**б)** В общем случае докажите, что  $S(P) - 2D(P) + 2\pi F - 4\pi = 0$ , где  $F$  — число граней многогранника (теорема Грэма).

**Подсказка.** Многогранник можно разбить на тетраэдры.

**Задача 5.** Постройте на кубе третье семейство замкнутых несамопересекающихся геодезических (первые два были построены на втором занятии), и найдите длину такой геодезической.

**Задача 6. а)** Найдите все замкнутые геодезические на правильном тетраэдре.

**б)** Докажите, что они все являются несамопересекающимися.

**в)** Постройте какую-нибудь несамопересекающуюся геодезическую на правильном октаэдре.