

Рекуррентные соотношения — 3. Диаграммы Юнга

Задача 1. Найдите количество неупорядоченных разбиений числа 57, в которых число слагаемых не превышает девяти, а максимальное из слагаемых — семи.

Задача 2. На доске написано несколько натуральных чисел: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Напишем на другой доске следующие числа: b_0 — сколько всего чисел на первой доске, b_1 — сколько там чисел, больших единицы, b_2 — сколько там чисел, больших двойки, и так далее, пока получаются положительные числа. На этом заканчиваем — нули не пишем. На третьей доске пишем числа c_0, c_1, c_2, \dots , построенные по числам второй доски аналогичным образом. Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают.

Задача 3. Рассмотрим следующее преобразование $S(D)$ диаграммы Юнга D , соответствующей разбиению числа n на различные слагаемые: срезаем левую верхнюю диагональ, насколько это возможно (то есть пока не дойдём до столбца, который короче предыдущего на две или больше клеток), и приставляем все эти клетки в качестве самого правого столбца.

а) Докажите, что если к некоторой диаграмме можно применить это преобразование, то к ней нельзя применить обратное преобразование S^{-1} , и наоборот.

б) Опишите диаграммы, к которым нельзя применить ни S , ни S^{-1} .

в) Докажите Пентагональную теорему Эйлера:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (q^{(3k^2-k)/2} + q^{(3k^2+k)/2}).$$

Рекуррентные соотношения — 3. Диаграммы Юнга

Задача 1. Найдите количество неупорядоченных разбиений числа 57, в которых число слагаемых не превышает девяти, а максимальное из слагаемых — семи.

Задача 2. На доске написано несколько натуральных чисел: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Напишем на другой доске следующие числа: b_0 — сколько всего чисел на первой доске, b_1 — сколько там чисел, больших единицы, b_2 — сколько там чисел, больших двойки, и так далее, пока получаются положительные числа. На этом заканчиваем — нули не пишем. На третьей доске пишем числа c_0, c_1, c_2, \dots , построенные по числам второй доски аналогичным образом. Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают.

Задача 3. Рассмотрим следующее преобразование $S(D)$ диаграммы Юнга D , соответствующей разбиению числа n на различные слагаемые: срезаем левую верхнюю диагональ, насколько это возможно (то есть пока не дойдём до столбца, который короче предыдущего на две или больше клеток), и приставляем все эти клетки в качестве самого правого столбца.

а) Докажите, что если к некоторой диаграмме можно применить это преобразование, то к ней нельзя применить обратное преобразование S^{-1} , и наоборот.

б) Опишите диаграммы, к которым нельзя применить ни S , ни S^{-1} .

в) Докажите Пентагональную теорему Эйлера:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (q^{(3k^2-k)/2} + q^{(3k^2+k)/2}).$$