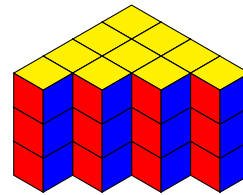


Задача 2.1. Завершите доказательство формулы Макмагона,

$$PP(a, b, c) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq a, \\ 1 \leq j \leq b, \\ 1 \leq k \leq c}} \frac{i + j + k - 1}{i + j + k - 2}.$$

Задача 2.2. а) Количество трехмерных диаграмм Юнга внутри призмы высоты h , основанием которой — диаграмма Юнга $(n - 1, n - 2, \dots, 1)$ (на рис. $n = 5, h = 3$), равно определителю

$$\det \begin{pmatrix} C_n & C_{n+1} & \dots & C_{n+h-1} \\ C_{n+1} & C_{n+2} & \dots & C_{n+h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n+h-1} & C_{n+h} & \dots & C_{n+2h-2} \end{pmatrix},$$



где C_n — n -е число Каталана (утверждение для $h = 1$ можно считать определением чисел Каталана).

б*) Вычислите этот определитель. (УКАЗАНИЕ. Как связаны C_n и $\binom{1/2}{n}$?)

Задача 2.3. Будем называть *треугольником Гельфанда–Цетлина* треугольную таблицу из целых чисел, в которой каждое число не меньше левого верхнего, но меньше правого верхнего соседа.

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & \dots & l_{n-1} & l_n \\ & l_{12} & l_{23} & \dots & l_{n-1n} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & l_{1n-1} & l_{2n} \\ & & & & l_{1n} \end{matrix}$$

Число треугольников Гельфанда–Цетлина с данной первой строкой есть

$$\prod_{i>j} \frac{l_i - l_j}{i - j}.$$

(УКАЗАНИЕ. Задачу можно свести к подсчету непересекающихся путей.)