

- ▷ *Минор* матрицы — это определитель ее (квадратной) подматрицы A_{IJ} , получающейся, если оставить только элементы a_{ij} , такие что $i \in I, j \in J$.

Задача 3.1. Миноры произведения могут быть найдены по *формуле Коши–Бине*

$$\det(AB)_{IJ} = \sum_S \det A_{IS} \cdot \det B_{SJ},$$

где суммирование ведется по всем подмножествам множества индексов из нужного числа элементов.

(Это утверждение обобщает с одной стороны — определение произведения матриц, с другой — утверждение о мультипликативности определителя.)

- ▷ Пусть Γ — ориентированный граф. Его (ориентированной) *матрицей инцидентности* называется матрица ∂ , строки которой соответствуют вершинам, столбцы — ребрам, а элементы определяются следующим образом

$$\partial_{ve} = \begin{cases} -1, & v \text{ — начало ребра } e; \\ 1, & v \text{ — конец ребра } e; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача 3.2. На диагонали *матрицы Лапласа* $\Delta := \partial\partial^*$ (где ∂^* — транспонированная матрица) стоят степени вершин, а вне диагонали — (-1) для пар вершин, соединенных ребром, и 0 для не соединенных.

- ▷ *Матричная теорема о деревьях* состоит в том, что главный минор матрицы Лапласа графа равен числу остовных деревьев графа.

Задача 3.3. Найдите число деревьев с n пронумерованными вершинами, применив матричную теорему о деревьях к полному графу.