## Комбинаторная геометрия — 1

*Напоминание.* Формула Эйлера гласит, что для любого планарного графа $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2$, где В — число вершин графа, Р — число рёбер, а $\Gamma$ — число частей, на которые укладка графа разбивает плоскость.

**Задача 1.** Докажите, что если в планарном графе $G$ длина кратчайшего цикла равна $t$, то

а) $|E(G)| \geqslant t \cdot |F(G)|/2$, где $F(G)$ — число граней планарного графа;

б) $|E(G)| \leqslant \dfrac{t}{t-2} \cdot (|V(G)| - 2)$.

в) Выведите отсюда, что графы $K_5$ и $K_{3,3}$ непланарны.

**Задача 2.** Докажите, что $crK_n = O(n^4)$.

**Задача 3.** Пусть $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$. Докажите, что для любых $n$ точек на плоскости число прямых, содержащих по крайней мере $k$ из этих точек, не превышает $cn^2/k^3$ для некоторой константы $c > 0$.

*Группа B, 16 июня 2014*

## Комбинаторная геометрия — 1

*Напоминание.* Формула Эйлера гласит, что для любого планарного графа $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2$, где В — число вершин графа, Р — число рёбер, а $\Gamma$ — число частей, на которые укладка графа разбивает плоскость.

**Задача 1.** Докажите, что если в планарном графе $G$ длина кратчайшего цикла равна $t$, то

а) $|E(G)| \geqslant t \cdot |V(G)|/2$,

б) $|E(G)| \leqslant \dfrac{t}{t-2} \cdot (|V(G)| - 2)$.

в) Выведите отсюда, что графы $K_5$ и $K_{3,3}$ непланарны.

**Задача 2.** Докажите, что $crK_n = O(n^4)$.

**Задача 3.** Пусть $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$. Докажите, что для любых $n$ точек на плоскости число прямых, содержащих по крайней мере $k$ из этих точек, не превышает $cn^2/k^3$ для некоторой константы $c > 0$.