Комбинаторная геометрия — 2 (она же Аддитивная комбинаторика — 1)

Задача 1. *(Неравенство треугольника Ружи)* Докажите, что для любых непустых подмножеств A, B, C произвольной абелевой группы G выполнено неравенство

$$|A - B| \leqslant \frac{|A - C|\,|B - C|}{|C|}.$$

Задача 2. Пусть A и B — непустые подмножества абелевой группы G. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

i) $|A + B| = |A|$;

ii) $|A - B| = |A|$;

iii) $|A + nB - mB| = |A|$ для хотя бы одной пары натуральных чисел (m, n).

Задача 3. *(Липтон–ДеМилло–Шварц–Зиппель)* Пусть $F = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — многочлен от $n \leqslant 1$ переменных с рациональными коэффициентами, а $S \subset \mathbb{Q}$ — непустое множество. Выберем элементы $s_1, s_2, \ldots, s_n$ случайно, независимо, равномерно из множества S. Докажите, что

$$P\big(F(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0\big) \leqslant \frac{\deg P}{|S|}.$$

Указание. Примените индукцию по количеству переменных.

Группа B, 17 июня 2014

Комбинаторная геометрия — 2 (она же Аддитивная комбинаторика — 1)

Задача 1. *(Неравенство треугольника Ружи)* Докажите, что для любых непустых подмножеств A, B, C произвольной абелевой группы G выполнено неравенство

$$|A - B| \leqslant \frac{|A - C|\,|B - C|}{|C|}.$$

Задача 2. Пусть A и B — непустые подмножества абелевой группы G. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

i) $|A + B| = |A|$;

ii) $|A - B| = |A|$;

iii) $|A + nB - mB| = |A|$ для хотя бы одной пары натуральных чисел (m, n).

Задача 3. *(Липтон–ДеМилло–Шварц–Зиппель)* Пусть $F = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — многочлен от $n \leqslant 1$ переменных с рациональными коэффициентами, а $S \subset \mathbb{Q}$ — непустое множество. Выберем элементы $s_1, s_2, \ldots, s_n$ случайно, независимо, равномерно из множества S. Докажите, что

$$P\big(F(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0\big) \leqslant \frac{\deg P}{|S|}.$$

Указание. Примените индукцию по количеству переменных.