Двойные отношения — 2

Задача 1. Пусть AD и AE — биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника ABC, а S_a — окружность с диаметром DE. Окружности S_b и S_c определяются аналогично. Докажите, что:

а) окружности S_a, S_b и S_c имеют две общие точки M и N, причём прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC;

б) проекции точки M (и точки N) на стороны треугольника ABC образуют правильный треугольник.

Задача 2. На окружности S, являющейся окружностью Аполлония для точек A и B, взята произвольная точка M. AM вторично пересекает S в точке P, а BM — в точке Q. Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны.

Задача 3. Дана окружность Аполлония S для точек A и B, причем точка A лежит снаружи окружности. Хорда PQ окружности содержит точку B. Докажите, что $\angle PAB = \angle QAB$.

Задача 4. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна её диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

Задача 5. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC с центром в точке I касается его сторон в точках A', B', C' соответственно. Прямая $B'C'$ пересекается с прямой BC в точке K. Докажите, что KI перпендикулярно AA'.

Задача 6. Точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC, R — произвольная точка. Прямые AR, BR и CR пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что точки пересечения прямых MA_1 и BC, MB_1 и CA, MC_1 и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку R.

Задача 7. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC; окружности, описанные около треугольников ABC и A_1B_1C, вторично пересекаются в точке P, а Z — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведённых в точках A и B. Докажите, что прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.