

## Обходы графов

1. Рассмотрим дерево обхода в ширину графа. Может ли ребро графа соединять вершины на одном уровне дерева обхода в ширину? Может ли какое-то ребро, не вошедшее в дерево обхода в ширину, соединять две вершины на соседних уровнях? А через уровень?
2. Докажите лемму: предположим, что в процессе выполнения процедуры поиска в ширину над графом  $G$  очередь содержит вершины  $(v_1, \dots, v_r)$ , где  $v_1$  - голова очереди, а  $v_r$  - ее хвост. Тогда  $d[v_r] \leq d[v_1] + 1$ , и для всех  $i$  от 1 до  $r-1$  справедливы соотношения  $d[v_i] \leq d[v_{i+1}]$ .
3. Докажите, что ориентированный граф ациклический тогда и только тогда, когда при поиске в глубину в нем не обнаружено "обратных ребер".
4. В графе  $N$  вершин. Расстояние между вершинами  $A$  и  $B$  больше  $N/2$ . Докажите, что существует вершина, при удалении которой все пути из вершины  $A$  в вершину  $B$  рвутся.
5. Дана изначальная конфигурация для игры Пятнашки  $3 \times 3$ . Придумайте алгоритм, который находит, за какое минимальное число шагов можно прийти от данной конфигурации к победной.
6. Придумайте алгоритм, который для каждой вершины делает пометку, лежит ли эта вершина на каком-то направленном цикле.
7. Могут ли в дереве обхода в глубину ориентированного графа встречаться прямые ребра? А перекрестные?
8. Докажите, что  $n$ -ая степень матрицы инцидентности графа - это матрица, в которой элемент с координатами  $[i, j]$  содержит число путей длины  $n$  из вершины  $i$  в вершину  $j$ . Считается, что путь может содержать одно и то же ребро несколько раз. Рассматриваются графы без петель и кратных ребер.