

Неравенства — 1

Задача 1. Сравните числа:

- a) $\frac{2015}{2014} ? \frac{2014}{2013}$
 b) $(\sqrt{23} - \sqrt{11}) ? (\sqrt{22} - \sqrt{10})$

Задача 2. Сравните выражения:

- a) $(a - 1)(a + 2) ? (a + 4)(a - 3)$
 b) $(b^2 + 57) ? (2b + 55)$
 c) $(c^4 + 1) ? 2c|c|$

Задача 3. Докажите неравенство для любых a, b, c, d :

- a) $a^4 - 4a^3b + 8a^2b^2 - 16ab^3 + 16b^4 \geq 0$
 b) $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \leq (ac - bd)^2$

Задача 4. Докажите неравенство:

$$(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc, \text{ где } a, b, c > 0$$

Задача 5. Докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

где $a > 0, b > 0, c > 0$

Задача 6. Докажите неравенство:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

если $a, b > 0$ и $a + b = 1$

Задача 7. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ac = 1$.

Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

(Региональный этап Всероссийской олимпиады по математике 2014-2015, 11 класс)

Задача 8. Числа x, y, z и t таковы, что $x > y^3, y > z^3, z > t^3, t > x^3$. Докажите, что $xyzt > 0$.