

Производящие функции.

Задача 1. Докажите, что ряд экспоненты $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ не представим в виде отношения многочленов $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Задача 2. Найдите производящую функцию для чисел трибоначчи

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Задача 3. Докажите тождество $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ для рядов

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

Задача 4. Функция $\log(1+x)$ определяется соотношением $e^{\log(1+x)} = 1+x$ (т.е. логарифм обратен к экспоненте). Найдите ряд $\log(1+x)$, т.е. коэффициенты в равенстве

$$\log(1+x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$