Двудольные графы и паросочетания

1. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в графе имеют четную длину.
2. Докажите, что в однородном двудольном графе существует совершенное паросочетание.
3. Пусть G – однородный двудольный граф с вершинами степени m. Докажите, что для любых m – 1 ребер G существует совершенное паросочетание, которое не содержит ни одного из этих ребер.
4. Какое наибольшее количество различных совершенных паросочетаний может быть в двудольном графе с долями размера n? Паросочетания считаются различными, если существует ребро, входящее в одно из них и не входящее в другое.
5. Каждый из двух равновеликих квадратов разбили на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого квадрата оказалась проткнута.
6. Есть n юношей и n девушек. Назовем множество юношей размера k хорошим, если они суммарно знают хотя бы k девушек. Назовем подмножество юношей размера k критическим, если суммарно они знают ровно k девушек. Пусть все множества хорошие и существует критическое множество. Рассмотрим тогда наименьшее критическое множество. Докажите, что можно любого юношу из критического множества поженить на любой его знакомой, после чего все множества останутся хорошими.
7. Даны k мальчиков и 2k - 1 конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).
8. Пусть $S = \{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$ – набор множеств, такой что для любого k объединение любых k множеств S_{0069} содержит не менее k элементов. Докажите, что существует набор различных элементов $s_1,s_2,\ldots,s_n$ этих множеств, такой что для каждого i верно $s_i \in S_i$.
9. Хроматическим числом графа (или вершинным хроматическим числом графа) называется нименьшее такое число C, что вершины графа возможно раскрасить в C цветов таким образом, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром. Докажите, что хроматическое число графа равно двум тогда и только тогда, когда граф является двудольным, и множество его ребер непусто.
10. Реберным хроматическим числом графа называется наименьшее такое число C, что ребра графа возможно раскрасить в C цветов таким образом, чтобы никакие два ребра одного цвета не имели общей вершины. Докажите, что для двудольного графа реберное хроматическое число равно максимальной степени вершин графа.
11. Среди n девушек и n юношей некоторые пары знакомы друг с другом. У каждого юноши есть четкий список предпочтений про девушек, с которыми он знаком: какая-то из девушек нравится ему больше всех, какая-то из остальных – больше всех других, и так далее. Девушки, с которыми юноша не знаком, не нравятся ему вовсе. У девушек есть предпочтения про юношей того же вида. Всегда ли можно составить n пар таким образом, чтобы не было завидующих пар? Пара завидует другой паре, если юноше из первой пары больше нравится девушка из другой пары, чем его пара, и при этом девушке из первой пары больше нравится юноша из другой пары, чем ее пара.
12. Докажите, что в наибольшем паросочетании (т.е. таком, в котором максимально возможное число ребер) двудольного графа не более чем в 2 раза больше ребер, чем в любом максимальном паросочетании этого графа (т.е. таком, к которому нельзя добавить еще одно ребро, не трогая уже имеющихся ребер).