

Введение в теорию групп

Листок 3

Коммутанты; Группы движений многоугольников и многогранников

ЗАДАЧА 1. Для любой фигуры (любого множества точек) в конечномерном аффинном пространстве \mathbb{R}^n множество всех ее движений (преобразований, сохраняющих расстояния между ее точками) образует группу относительно операции композиции.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что группа движений квадрата изоморфна группе D_4 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Группа движений правильного n -угольника обозначается через D_n и называется *группой диэдра*.

ЗАДАЧА 3. Сколько элементов в группе D_n ? Каким минимальным количеством порождающих элементов обладает эта группа?

ЗАДАЧА 4. Задайте группу D_n с помощью образующих и соотношений.

ЗАДАЧА 5. Нарисуйте плоские фигуры, для которых группа движений изоморфна

а) \mathbb{Z}_2 ; б) V_4 ; в) \mathbb{Z}_3 ; г) \mathbb{Z}_n .

ЗАДАЧА 6. Найдите группы собственных движений

а) куба; б) октаэдра; в)* икосаэдра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если x, y — элементы некоторой группы G , то элемент $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ называется *коммутатором* элементов x и y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Коммутантом* группы G (обозначение $[G, G]$ или G') называется подгруппа в G , порожденная коммутаторами всех ее элементов.

ЗАДАЧА 7. Докажите, что коммутант группы всегда является нормальной подгруппой.

ЗАДАЧА 8. Докажите, что $G/[G, G]$ — абелева группа.

ЗАДАЧА 9. Докажите, что коммутант группы G является наименьшей нормальной подгруппой группы G , фактор по которой абелев.

ЗАДАЧА 10. Найдите коммутанты следующих групп:

а) S_n ; б) A_n ; в) D_n .

ЗАДАЧА 11*. Верно ли, что произведение двух коммутаторов группы является коммутатором?

ЗАДАЧА 12. Опишите с точностью до изоморфизма все абелевы группы из p^3 элементов (p — простое).

ЗАДАЧА 13. Найдите с точностью до изоморфизма все группы из 8 элементов.

ЗАДАЧА 14. Приведите пример, показывающий, что обращение теоремы Лагранжа неверно: найдите такую конечную группу G , $|G| = n$, и число $m|n$, что в группе G не существует подгруппы из m элементов.

ЗАДАЧА 15*. Для какого минимального n можно построить пример предыдущей задачи?