

Кватернионы

Пусть $(z, w) \in \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$ — пара единичных кватернионов. Рассмотрим отображение

$$R_{(z,w)}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}; \quad R_{(z,w)}(q) = zq\bar{w}.$$

Задача 1. Докажите, что $R_{(z,w)}$ сохраняет длины (четырёхмерных) векторов из \mathbb{H} (а значит, и углы между ними!).

Группа ортогональных преобразований пространства \mathbb{R}^4 обозначается $O(4)$. В ней имеется подгруппа, состоящая из собственных преобразований; она обозначается через $SO(4)$.

Задача 2. Докажите, что R задает гомоморфизм групп $R: \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1) \rightarrow O(4)$.

Задача 3*. Докажите, что преобразование $R_{(z,w)}$ будет собственным при любых $z, w \in \text{Sp}(1)$.

Задача 4. Докажите, что $R_{(z,w)}$ — тождественное преобразование тогда и только тогда, когда $z = w = -1$.

Задача 5*. Найдите такие z, w , что $R_{(z,w)}$ есть композиция двух вращений в двух взаимно перпендикулярных двумерных плоскостях.

Задача 6*. Покажите, что $\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1) \rightarrow SO(4)$ есть сюръективное отображение групп.

Для получения зачета достаточно решить любые три задачи.