

Задачи на движения

Для успешной сдачи этого листка необходимо решить все задачи с кружочками и две трети задач без кружочков.

1°. Даны четыре попарно непараллельные прямые и точка O , не лежащая на этих прямых. Постройте параллелограмм с центром O и вершинами, лежащими на данных прямых, — по одной на каждой.

2°. Дана прямая l и две точки A и B в одной полуплоскости. Найдите на прямой l точку C такую, что длина ломаной ACB минимальна.

3°. Пусть K , L , M и N — середины сторон AB , BC , CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $KM \leq \frac{BC+AD}{2}$, причём равенство достигается, только если $BC \parallel AD$.

4. Среди всех четырёхугольников с данными длинами диагоналей и величиной угла между ними найдите четырёхугольник наименьшего периметра.

5. Даны окружности S_1 и S_2 . Проведите прямую l , параллельную данной прямой l_1 , так, чтобы S_1 и S_2 высекали на ней равные хорды.

6. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит 0,34.

Подсказка: рассмотрите образы фигуры под действием некоторых движений такие, что все три получившихся фигуры не пересекаются и почти умеются в квадрат.

7. Дан выпуклый n -угольник с попарно непараллельными сторонами и точка O внутри его. Докажите, что через точку O нельзя провести более n прямых, каждая из которых делит площадь n -угольника пополам.

Подсказка: предположите обратное и посмотрите, в какие части плоскости могут попасть вершины.

8. Найдите множество вершин выпуклых четырёхугольников, середины сторон которых являются вершинами данного квадрата.

9. Дана точка, лежащая внутри треугольника, образованного средними линиями данного треугольника. Сколько существует отрезков с концами на сторонах данного треугольника, делящихся этой точкой пополам?

10. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом 45° . Докажите, что $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M .

11. Постройте треугольник по сторонам AB , BC и углу, равному разности углов BAC и BCA .

12. Даны три прямые l_1 , l_2 и l_3 , пересекающиеся в одной точке, и точка A_1 на прямой l_1 . Постройте треугольник ABC так, чтобы точка A_1 была серединой его стороны BC , а прямые l_1 , l_2 и l_3 были серединными перпендикулярами к сторонам.