

# Группы; группы подстановок

## Листок 3

### Теорема Кэли. Группы движений многогранников.

ЗАДАЧА 1. Какие из следующих подмножеств группы подстановок  $S_n$  являются в ней подгруппами:

- а) множество всех четных перестановок (обозначение:  $A_n$ );
- б) множество всех нечетных перестановок;
- в) множество всех перестановок, оставляющих неподвижными элементы некоторого подмножества  $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ ;
- г) множество всех перестановок, при которых образы всех элементов некоторого подмножества  $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  принадлежат этому подмножеству;
- д) множество  $\{E, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  (обозначение:  $V_4$ );
- е) множество  $\{E, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}$  (обозначение:  $D_4$ )?

ЗАДАЧА 2 (ТЕОРЕМА КЭЛИ). Докажите, что любая конечная группа вкладывается в группу подстановок  $S_n$  для некоторого  $n$ , не превосходящего ее порядка.

ЗАДАЧА 3. Для любой фигуры (любого множества точек) в конечномерном аффинном пространстве  $\mathbb{R}^n$  множество всех ее движений (преобразований, сохраняющих расстояния между точками) образует группу относительно операции композиции.

ЗАДАЧА 4. Докажите, что группа движений квадрата изоморфна группе  $D_4$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Группа движений правильного  $n$ -угольника обозначается через  $D_n$  и называется *группой диэдра*.

ЗАДАЧА 5. Сколько элементов в группе  $D_n$ ? Каким минимальным количеством порождающих элементов обладает эта группа?

ЗАДАЧА 6. Нарисуйте плоские фигуры, для которых группа движений изоморфна  
а)  $\mathbb{Z}_2$ ; б)  $V_4$ ; в)  $\mathbb{Z}_3$ ; г)  $\mathbb{Z}_n$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Движение плоскости (пространства) называется *собственным*, если оно сохраняет ориентацию ее (его) базиса.

ЗАДАЧА 7. Найдите группы всех и собственных движений правильного тетраэдра.

ЗАДАЧА 8. Найдите группы всех и собственных движений куба и правильного октаэдра.

ЗАДАЧА 9. Найдите группу собственных движений правильного икосаэдра.