

Группы; группы подстановок

Листок 3

Теорема Кэли. Группы движений многогранников.

ЗАДАЧА 1. Какие из следующих подмножеств группы подстановок S_n являются в ней подгруппами:

- а) множество всех четных перестановок (обозначение: A_n);
- б) множество всех нечетных перестановок;
- в) множество всех перестановок, оставляющих неподвижными элементы некоторого подмножества $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$;
- г) множество всех перестановок, при которых образы всех элементов некоторого подмножества $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ принадлежат этому подмножеству;
- д) множество $\{E, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ (обозначение: V_4);
- е) множество $\{E, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}$ (обозначение: D_4)?

ЗАДАЧА 2 (ТЕОРЕМА КЭЛИ). Докажите, что любая конечная группа вкладывается в группу подстановок S_n для некоторого n , не превосходящего ее порядка.

ЗАДАЧА 3. Для любой фигуры (любого множества точек) в конечномерном аффинном пространстве \mathbb{R}^n множество всех ее движений (преобразований, сохраняющих расстояния между точками) образует группу относительно операции композиции.

ЗАДАЧА 4. Докажите, что группа движений квадрата изоморфна группе D_4 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Группа движений правильного n -угольника обозначается через D_n и называется *группой диэдра*.

ЗАДАЧА 5. Сколько элементов в группе D_n ? Каким минимальным количеством порождающих элементов обладает эта группа?

ЗАДАЧА 6. Нарисуйте плоские фигуры, для которых группа движений изоморфна
а) \mathbb{Z}_2 ; б) V_4 ; в) \mathbb{Z}_3 ; г) \mathbb{Z}_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Движение плоскости (пространства) называется *собственным*, если оно сохраняет ориентацию ее (его) базиса.

ЗАДАЧА 7. Найдите группы всех и собственных движений правильного тетраэдра.

ЗАДАЧА 8. Найдите группы всех и собственных движений куба и правильного октаэдра.

ЗАДАЧА 9. Найдите группу собственных движений правильного икосаэдра.