

Проективность

Для успешной сдачи этого листка необходимо решить три задачи.

1 (свойства двойного отношения). Докажите, что для любой четвёрки точек на проективной прямой выполнены следующие тождества:

i) $[a, b, c, d] = [b, a, d, c] = [c, d, a, b] = [d, c, b, a]$;

ii) $[a, x, y, b] \cdot [b, x, y, c] = [a, x, y, c]$;

iii) $[a, b, c, d] \cdot [a, c, b, d] = 1$;

iv) $[a, b, c, d] + [c, b, a, d] = 1$.

Попробуйте «увидеть» это, поняв, какие именно проективные преобразования прямой отвечают этим равенствам.

2. Докажите, что при помощи одной линейки нельзя разделить данный отрезок пополам. Почему наличие на чертеже прямой, параллельной данному отрезку, позволяет осуществить построение (вспомните, как оно делается)?

3 (четырёхвершинник). Дан четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке X , прямые AD и BC — в точке Y , прямые AC и BD — в точке Z . Докажите, что $[XC, XY, XZ, XA] = -1$.

4. Проективное преобразование плоскости переводит некоторую окружность в себя и её центр — тоже. Докажите, что это преобразование — либо поворот, либо симметрия.