

## Другое доказательство пентагональной теоремы Эйлера

Рассмотрим бесконечное произведение

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + xq^k)(1 + x^{-1}q^{k-1}).$$

Его можно рассматривать как *ряд Лорана* по  $x$ :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(q)x^n,$$

коэффициенты которого  $a_n(q)$  суть формальные степенные ряды от  $q$ .

**Задача 1.** Проверьте, что  $f(xq) = x^{-1}q^{-1}f(x)$ .

**Задача 2.** Докажите, что при  $n \in \mathbb{Z}$  имеют место равенства

**а)**  $a_n(q)q^{n+1} = a_{n+1}(q)$ ; **б)**  $f(x) = a_0(q) \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n+1)/2} x^n$ .

**Задача 3.** Пусть  $b_m$  есть число способов представить число  $m$  в виде суммы нескольких различных элементов множества  $\{1, 2, 3, \dots\}$  и такого же числа различных элементов множества  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Покажите, что  $a_0(q) = \sum_{m \geq 0} b_m q^m$ .

**Задача 4.** Докажите, что  $b_m$  равно  $p(m)$ , т.е. числу разбиений числа  $m$ .

**Задача 5 (тождество Якоби для тройного произведения).** Выведите из предыдущих задач равенство

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + xq^n)(1 + x^{-1}q^{n-1})(1 - q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m(m+1)/2} x^m.$$

**Задача 6 (пентагональная теорема Эйлера).** Используя тождество Якоби, докажите, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m(3m-1)/2}.$$

esmirnov@hse.ru