

Введение в теорию групп

Листок 3

Группы подстановок.

ЗАДАЧА 1. Найдите произведение подстановок:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 2. а) Найдите четность цикла $(i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k)$.

в) Найдите четность подстановки, разложенной в произведение циклов длин l_1, \dots, l_q .

ЗАДАЧА 3. Каких подстановок в группе \mathbf{S}_n больше — четных или нечетных?

ЗАДАЧА 4. Для каких подстановок из \mathbf{S}_n все остальные подстановки с ними коммутируют?

ЗАДАЧА 5. Докажите, что два цикла (i_1, \dots, i_p) и (j_1, \dots, j_q) коммутируют тогда и только тогда, когда либо данные циклы являются независимыми, либо один из них есть степень другого.

ЗАДАЧА 6. Докажите, что каждая подстановка может быть разложена в произведение подстановок только следующего вида:

а) транспозиций $(1, 2), (2, 3), \dots, (i, i+1), \dots, (n-1, n)$;

б) транспозиций $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, i), \dots, (1, n)$;

в) всего лишь двух подстановок — транспозиции $(1, 2)$ и подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 7 *. Докажите, что каждая четная подстановка может быть разложена в произведение подстановок только следующего вида:

а) циклов длины три;

б) циклов $(123), (124), \dots, (12n)$.

ЗАДАЧА 8 *. а) Найдите порядок подстановки, разложенной в произведение циклов длин l_1, \dots, l_q .

б) Каких подстановок больше в группе \mathbf{S}_n — четного или нечетного порядка?

ЗАДАЧА 9 *. Какие подстановки могут быть представлены в виде произведения двух циклов?

ЗАДАЧА 10 *. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня. (Предполагается, что при любых обменах каждая семья как до, так и после обмена занимает одну квартиру, и что семьи при этом сохраняются).