

### Задачи на движения

Для успешной сдачи этого листка необходимо решить все задачи без звёздочки, кроме двух, или все задачи со звёздочкой.

1. Даны четыре попарно непараллельные прямые и точка  $O$ , не лежащая на этих прямых. Постройте параллелограмм с центром  $O$  и вершинами, лежащими на данных прямых, — по одной на каждой. Сколько таких параллелограммов?

2. Даны прямые  $l_1, l_2$  и две точки  $A, B$  в одной части плоскости. Найдите на прямых точки  $C$  и  $D$  такие, что длина ломаной  $ACDB$  минимальна.

3. Даны окружности  $S_1$  и  $S_2$ . Проведите прямую  $l$ , параллельную данной прямой  $l_1$ , так, чтобы  $S_1$  и  $S_2$  высекали на ней равные хорды.

4. Отмечены середины сторон  $n$ -угольника, а сам он стёрт. Восстановите его. Всегда ли это возможно? Всегда ли это однозначно? Опишите все случаи.

5. Найдите геометрическое место вершин выпуклых четырёхугольников, середины сторон которых являются вершинами данного квадрата.

6. Дана точка, лежащая внутри треугольника, образованного средними линиями данного треугольника. Сколько существует отрезков с концами на сторонах данного треугольника, делящихся этой точкой пополам?

7. Постройте треугольник по сторонам  $AB, BC$  и углу, равному разности углов  $BAC$  и  $BCA$  (она положительна).

8. Даны три прямые  $l_1, l_2$  и  $l_3$ , пересекающиеся в одной точке, и точка  $A_1$  на прямой  $l_1$ . Постройте треугольник  $ABC$  так, чтобы точка  $A_1$  была серединой его стороны  $BC$ , а прямые  $l_1, l_2$  и  $l_3$  были серединными перпендикулярами к сторонам.

9. По двум равным окружностям против часовой стрелки с равной скоростью движутся две точки. Докажите, что серединный перпендикуляр к соединяющему их отрезку всегда проходит через фиксированную точку или всегда параллелен некоторой прямой.

10. Внутри квадрата  $A_1A_2A_3A_4$  взята точка  $P$ . Из вершины  $A_1$  опущен перпендикуляр на прямую  $PA_2$ , из  $A_2$  — на  $PA_3$  и так далее. Докажите, что получившиеся четыре прямые пересекаются в одной точке.

11. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины лежали на трёх данных параллельных прямых.

12\*. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит 0,34.

13\*. В данный остроугольный треугольник впишите (то есть выберите по точке на каждой стороне) треугольник наименьшего периметра.

14\*. Дан выпуклый  $n$ -угольник с попарно непараллельными сторонами и точка  $O$  внутри его. Докажите, что через точку  $O$  нельзя провести более  $n$  прямых, каждая из которых делит площадь  $n$ -угольника пополам.

15\*. На плоскости дан конечный набор прямых такой, что никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Известно, что этот набор переходит в себя при некотором не тождественном повороте. Сколько прямых может быть в этом наборе?