

# Введение в теорию групп

## Листок 1

ЗАДАЧА 1. Найдите четность и произведение подстановок:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ;

б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$ .

ЗАДАЧА 2. Сколько элементов в группе  $\mathbf{S}_n$ ?

ЗАДАЧА 3. а) Найдите четность цикла  $(i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k)$ .

б) Найдите четность подстановки, разложенной в произведение циклов длин  $l_1, \dots, l_q$ .

ЗАДАЧА 4. Каких подстановок в группе  $\mathbf{S}_n$  больше — четных или нечетных?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Порядком* подстановки  $\sigma$  называется минимальное натуральное число  $n > 0$  такое, что  $\sigma^n = e$ .

ЗАДАЧА 5. Докажите, что у любой подстановки есть порядок.

ЗАДАЧА 6. а) Найдите порядок всех подстановок из первой задачи

б) Возведите все подстановки из первой задачи в 57-ую степень.

ЗАДАЧА 7. а) Найдите порядок подстановки, разложенной в произведение циклов длин  $l_1, \dots, l_q$ .

б) Каких подстановок больше в группе  $\mathbf{S}_n$  — четного или нечетного порядка?

ЗАДАЧА 8. Некоторый текст зашифровали, поставив в соответствие каждой букве некоторую (возможно, ту же самую букву) букву так, что текст можно однозначно расшифровать. Докажите, что найдется такое число  $N$ , что после  $N$ -кратного применения шифрования заведомо получится исходный текст. Найдите из всех таких значений  $N$  наименьшее, годящееся для всех шифров (при условии, что в алфавите 33 буквы).