Введение в теорию групп

Листок 2

Задача 1. Какие из указанных числовых множеств с операциями являются группами?

а) $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+)$.

б) $(\mathbb{Z},\cdot),(\mathbb{Q},\cdot),(\mathbb{R},\cdot)$.

в) $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot),(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot),(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.

г) $(\mathbb{Z}_+,\cdot),(\mathbb{Q}_+,\cdot),(\mathbb{R}_+,\cdot)$, где индекс $+$ обозначает подмножество, состоящее из положительных чисел.

Задача 2. Пусть в группе $(G,*)$ есть элемент a, такой что

$$\forall x\in G\ a*x=x.$$

Докажите, что a - нейтральный элемент (единица) в группе G.

Задача 3. Существует ли бесконечная неабелевая группа?

Задача 4. Найдите все различные (не изоморфные между собой) группы из четырех элементов.

Задача 5. Какой наименьшее количество элементов может иметь неабелевая группа?

Задача 6. Докажите, что если в группе G для любого $g\in G$ выполняется $g^2=e$, то G — абелева группа.

Задача 7. Найдите все подгруппы

а) группы $\mathbb{Z}_6$; б) группы $\mathbf{S}_4$.

Задача 8. Докажите, что конечное непустое подмножество любой группы, замкнутое относительно умножения, является подгруппой. Верно ли это утверждение, если это подмножество бесконечно?

Задача 9. Найдите все неизоморфные группы порядка p (p — простое число).

Задача 10. Найдите все неизоморфные группы порядка 6.

Задача 11. Существует ли бесконечная группа, в которой у любого элемента конечный порядок?

Задача 12. Найдите все группы, у которых ровно три подгруппы.