Метод Штурма

Зачёт за листок ставится за 5 задач из 10.

1. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что тогда
$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)} \geq \frac{1}{3}.$$

2. Дан набор неотрицательных чисел, удовлетворяющий $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Докажите, что
$$(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \leq 2(n!).$$

3. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшей будет площадь правильного n-угольника.

4. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшим периметром будет обладать правильный n-угольник.

5. Пусть $x, y, z \geq 0$ и $x + y + z = 1$. Докажите, что
$$0 \leq xy + yz + xz - 2xyz \leq 7/27.$$

6. Пусть сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Докажите, что
$$\frac{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)}{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)} \geq (\frac{n+1}{n-1})^n.$$

7. Даны числа $1 \geq x_1$,$x_2, \ldots, x_n \geq 0$, где $n \geq 2$. Докажите, что
$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}.$$

8. Произведение положительных a, b, c равно 1. Докажите, что
$$a^2 + b^2 + c^2 - 3 \geq 18(a + b + c - ab - ac - bc).$$

9. . Для положительных a, b, c докажите, что
$$(a+b+c)^5 \geq 81abc(a^2+b^2+c^2).$$

10. Положительные a,b,c таковы, что $a + b + c = 3$. Докажите неравенство
$$a^2b + b^2c + c^2a \leq 4.$$