

Зачет за листок ставится за 6 задач из 10.

Неравенство КБШ

1. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите, что

$$\sqrt{3x^2 + xy} + \sqrt{3y^2 + yz} + \sqrt{3z^2 + zx} \leq 2(x + y + z).$$

2. (ИМО - 1995) Пусть a, b, c положительные числа такие, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

Указание: Попробуйте сделать замену $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$.

3. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1.$$

4. Пусть a, b, c, d положительные вещественные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

5. Пусть a, b, c положительные вещественные числа такие, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

Транснеравенство

6. Докажите, что $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a$.

7. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

8. Для положительных a_1, b_1, \dots, a_n докажите, что

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

9. Пусть a, b, c положительны. Докажите, что

$$a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

10. Для положительных a, b, c, d докажите, что

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leq \frac{3}{2}(a + b + c + d).$$