Разбиения и диаграммы Юнга

Задача 1. Пусть a_n — число диаграмм Юнга с полупериметром n (где $n \geq 2$). Докажите, что производящая функция для этой последовательности равна

$$\sum_{n\geq 2} a_n q^n = \frac{q^2}{1-2q}.$$

Задача 2. **а)** Выпишите производящую функцию для количества разбиений числа n в сумму *различных* слагаемых.

б) Выпишите производящую функцию для количества разбиений числа n в сумму *нечетных* слагаемых (возможно, одинаковых).

в) Сравнив результат предыдущих пунктов, покажите, что количество способов разбить число n на различные слагаемые равно количеству способов разбить его на нечетные слагаемые.

г*) Постройте явную биекцию между этими разбиениями.

Разбиение называется *самосопряженным*, если соответствующая диаграмма Юнга симметрична относительно диагонали.

Задача 3. **а)** Постройте биекцию между множеством самосопряженных разбиений числа n и множеством его разбиений в сумму различных нечетных слагаемых.

б) Вычислите производящую функцию для числа самосопряженных разбиений.

Задача 4*. Обозначим через σ_n сумму делителей числа n, включая 1 и n; так, например, $\sigma_6 = 1+2+3+6 = 12$. Пусть $\Sigma(q)$ — производящая функция для последовательности σ_n:

$$\Sigma(q) = q + 3q^2 + 4q^3 + 7q^4 + 6q^5 + 12q^6 + 8q^7 + \ldots.$$

а) Докажите, что

$$\Sigma(q)P(q) = qP'(q),$$

где $P(q)$ — производящая функция для числа разбиений.

б) Выведите отсюда рекуррентное соотношение на числа σ_n.

Указание. Рассмотрите *логарифмическую производную* ряда $P(q)$:

$$(\ln P(q))' = \frac{P'(q)}{P(q)}.$$

esmirnov@hse.ru