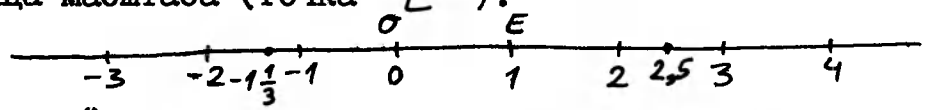
Листок I. Координаты на прямой.

Напоминания. Пусть на прямой выбрана точка O (начало координат) и единица масштаба (точка E).



Тогда всякой точке соответствует число, называемое ее координатой. Наоборот, для любого числа x можно найти точку, координата которой равна x. Вместо "точка с координатой x" мы будем говорить иногда коротко "точка x". При переводе на "язык точек" с "языка чисел" полезна такая таблица

числа	точки
число $x > 0$	точка x лежит справа от O
число x больше числа y	точка x лежит правее точки y
$\lvert x \rvert$	расстояние от точки x до точки O
$\lvert x - y \rvert$	расстояние между x и y

Напомним, что $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

Задачи

1. Чему равен $|-a|$ при $a<0$ – числу a или числу $-a$?

2. а) Известно, что $a \geq b$. Можно ли утверждать, что $|a| \geq |b|$?
б) Известно, что $a \leq b$ и $-a \leq b$. Можно ли утверждать, что $|a| \leq b$?

3. Нарисовать на прямой множества тех точек x, для которых
а) $x > 1$; б) $x - 2 \geq 2x$; в) $|x+1| = x+1$;
г) $|x-2| = |2-x|$; д) $|x+2| + |x+1| = 2$
(разберите случаи $x < -2$, $-2 \leq x \leq -1$, $x > -1$);
е) $|x+1| + |x-1| = 1$.

4. Доказать, что при всех x и y выполнено неравенство $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Указание. Рассмотреть 4 возможности: (а) $x \geq 0, y \geq 0$; (б) $x \geq 0, y < 0$; (в) $x < 0, y \geq 0$; (г) $x < 0, y < 0$.)

5. Дано, что $|x+2| \leq 3$, $|x-4| \leq 5$. Доказать, что $|x| \leq 1$.

6. Нарисовать множество тех точек x, для которых: а) $x^2 > 4$
б) из утверждений $x > 1$, $x > 2$, ..., $x > 10$ четное число верных;
в) $(x-1)(x-2)\ldots(x-10) \geq 0$.

7. а) Точки A и B имеют координаты a и b. Найти координату середины отрезка AB.
б) Решить уравнение $|x-a| = |x-b|$ (Надо указать, чему равно множество удовлетворяющих этому равенству значений x в зависимости от a и b.)

8*. Точка C лежит на отрезке AB и делит его в отношении $m:n$ (т.е. $AC/CB = m/n$). Найти координату точки C, если координаты точек A и B равны a и b. Рассмотрите сначала случай $m=1, n=2$.

9*. При каких значениях a уравнение $|x+3| + |x-1| = a$ не имеет решения, имеет одно решение, два решения, бесконечно много ре-

шений? (Решение уравнения – число, при подстановке которого вместо переменной получается верное равенство.)

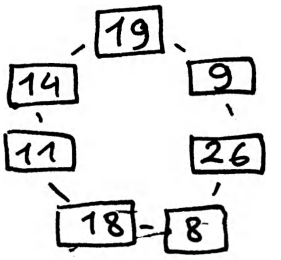
10*. Найти наименьшее значение выражения

$$|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-10|$$

При каком x оно достигается?

11*. На прямом шоссе через равные промежутки стоят 10 домов. Где нужно вырыть колодец, чтобы суммарное расстояние от всех домов до колодца было как можно меньше? А если промежутки между домами различны?

12*. На окружности расположено 7 коробок со спичками (внутри указано число спичек):



За один шаг разрешается переложить спичку из любой коробки в соседнюю. Придумать способ уравнять количества спичек во всех коробках за минимальное число шагов. Доказать, что меньшим числом шагов обойтись нельзя.

Через $[x]$ (целая часть x) обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[2]=2$, $[3\frac{1}{3}]=3$, $[-3\frac{1}{3}]=-4$.

13. Какие значения может принимать выражение $[x]+[-x]$?

14. Нарисовать множество тех x, для которых:

а) $x=[x]$; б) $[x]=[x+\frac{1}{3}]$.

15*. Доказать, что если a, b, c – положительные числа и число c целое, то

$$\left[\frac{a}{bc}\right]=\left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right]$$

П А М Я Т К А

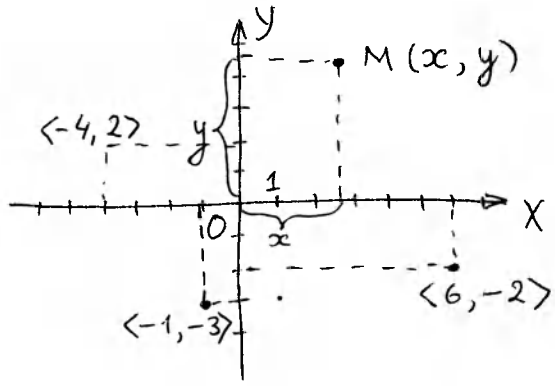
Для записи решений задач следует иметь специальную тетрадь (желательно общую). Задачи принимаются только **после того**, как их решения будут записаны в тетради. Эту тетрадь, так же как и выдаваемые Вам листки, следует приносить на каждый урок.

Задачи делятся на обязательные и дополнительные. Если Вам не будет сказано особо, обязательными для Вас являются задачи, не помеченные звездочкой (*). Листок считается пройденным, только если сданы все обязательные задачи. Мы советуем Вам завести список номеров всех задач, где отмечать, какие задачи Вы сдали (пункты а),б) и т. д. считаются отдельными задачами).

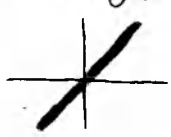
Желаем успехов!

Листок 2. Координаты на плоскости.

Напоминания. Нарисуем на плоскости две перепндикулярные прямые OX и OY и отметим единицу масштаба. Тогда каждой точке M плоскости соответствует пара чисел $\langle x, y\rangle$ называемых ее координатами (см. рисунок), и для любой пары чисел $\langle x, y\rangle$ можно найти точку с такими координатами. Вместо "точка с координатами $\langle x, y\rangle$" мы будем говорить "точка $\langle x, y\rangle$".



Пример. Нарисовать на плоскости множество тех точек $\langle x, y\rangle$, для которых $x = y$.

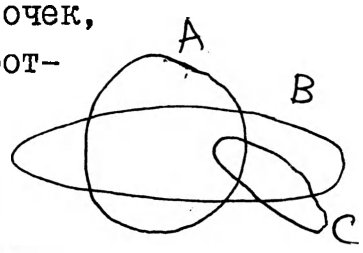


Решение. Точки $\langle x, y\rangle$, для которых $\langle x = y\rangle$, лежат на прямой, делящей угол XOY пополам.

Задачи.

I. Нарисовать множество тех точек $\langle x, y\rangle$, для которых:
а) $x > y$; б) $x = 1$; в) $xy = 0$; г) $x^2 + y^2 = 0$; д) $x + y = 0$;
е) $x^2 - y^2 = 0$; ж) $x > y$ и $x > -y$; з) $x > y$ или $x > -y$;
и) $|x - 1| < 0{,}1$; к) $|x-1| < 0{,}1$ и $|y-2| < 0{,}2$; л)* $xy < 1$;
м)* $[x] = [y]$; н)* $\{x\} = \{y\}$.

2. Множества A, B и C состоят из точек, попадающих внутрь линий на рисунке, обозначенных соответствующими буквами. Можно ли утверждать, что:



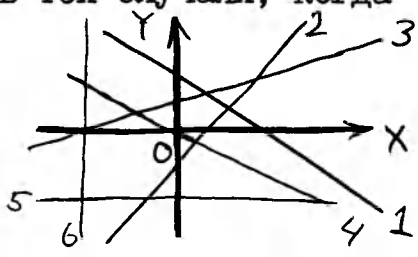
а) если $x \in A$ и $x \in B$, то $x \in C$?
б) если $x \in A$ и $x \notin B$, то $x \notin C$?
в) если $x \notin B$, то $x \notin A$ или $x \notin C$?

3. Нарисовать те точки $\langle x, y\rangle$, для которых $x = y$, $x^2 = y^2$, $x^3 = y^3$ (три рисунка). Можно ли утверждать, что:
а) если $x = y$, то $x^2 = y^2$? б) если $x^2 = y^2$, то $x = y$?
в) если $x^3 = y^3$, то $x = y$? г)* если $x + x^3 = y + y^3$, то $x = y$?

4. Точки $\langle 3, 2\rangle$ и $\langle a, -1\rangle$ расположены на одной прямой, параллельной оси OY. Найти a.

Напоминания. Множество точек $\langle x, y\rangle$, удовлетворяющих условию $y = kx + b$, является прямой. Таким образом может быть задана любая прямая, кроме вертикальных. К этому виду можно преобразовать и уравнение $ax + by + c = 0$, если $b \neq 0$ ($y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$); при $b = 0$ получается вертикальная прямая $x = -c/a$ (при $a \neq 0$). Прямые $y = kx + b$ и $y = k_1 x + b_1$ параллельны в тех случаях, когда $k = k_1$ и $b \neq b_1$.

5. Прямые I,2,3,4,5,6 заданы уравнениями вида $y = kx + b$. Определить для каждой из них знаки чисел k и b.



Координаты на плоскости (продолжение)

6. Точки $\langle 0,1\rangle$ и $\langle 2,3\rangle$ лежат на прямой $y=kx+b$. Найти k и b.

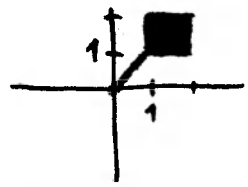
7. Уравнения $y=2x+3$ и $x=ay+b$ задают одну и ту же прямую. Найти a и b.

8. Нарисовать множества тех точек $\langle x,y\rangle$, для которых:
а) $x>2y$; б) $3x<-4y$; в) $2x<2y+4$; г) $2x+3y=5$.

9. Известно, что $x>y$ и $x>3y$. Можно ли утверждать, что $x>2y$? Нарисовать соответствующие множества.

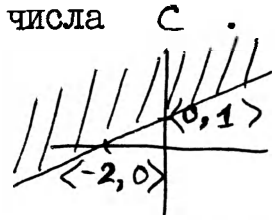
10. а) Точки $\langle 3,a\rangle$ и $\langle b,-5\rangle$ симметричны относительно прямой OX. Найти a и b. б) Тот же вопрос, если они симметричны относительно начала координат.

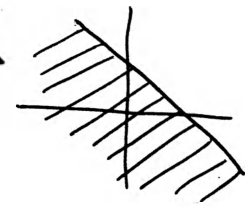
11. Множество A изображено на рисунке. Нарисовать множество тех $\langle x,y\rangle$, для которых
а) $\langle x,-y\rangle\in A$ (Запись: $\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,-y\rangle\in A\}$);
б) $\{\langle x,y\rangle \mid \langle -x,-y\rangle\in A\}$; в) $\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y+1\rangle\in A\}$;
г)* $\{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle\in A\}$; д)* $\{\langle x,y\rangle \mid \langle \frac{x}{2},\frac{y}{2}\rangle\in A\}$; е)* $\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,x+y\rangle\in A\}$



12.* Точка A с координатами $\langle x,y\rangle$ повернута на 90° против часовой стрелки вокруг начала координат. Найти координаты полученной точки B.

13. Заштриховано множество всех тех $\langle x,y\rangle$, для которых $ax+by+c>0$ Определить знак числа c.





14. Заштриховано множество всех тех $\langle x,y\rangle$, для которых
$ax+by+1<0$
Найти a и b.

15. Найти точку пересечения прямых $y=2x+1$ и $x+y=7$.

16.* Доказать, что если прямые $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ не пересекаются, то $k=k_1$ и $b\neq b_1$.

17.* Известно, что $|x+y|\le 1$ и $|x-2y|\le 2$. Какие значения может принимать x?

18.* а) Прямая $y=\frac{7}{15}x+\frac{1}{3}$ проходит через целочисленные точки $\langle 10,5\rangle$ и $\langle -20,-9\rangle$ (целочисленные точки – точки, обе координаты которых целые). Есть ли на ней другие целочисленные точки?

б) Прямая $y=kx+b$ проходит через 2 целочисленные точки. Может ли на ней не быть других целочисленных точек?

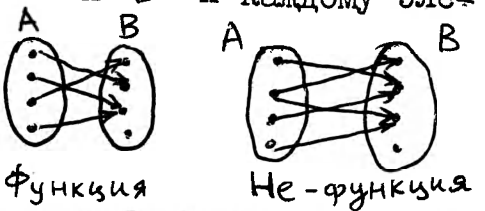
в) Существует ли прямая, не проходящая ни через одну целочисленную точку?

г) Существует ли прямая, проходящая ровно через одну целочисленную точку?

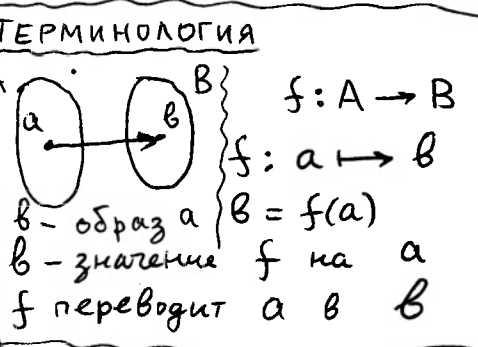
19.* В двух баках хранятся два раствора с разным процентным содержанием кислоты. Из этих растворов составлен 1 л 96%-го раствора и 0,5 л 40%-го раствора, причем на это было израсходовано 14/15 л раствора из 1-го бака и 17/30 л раствора из 2-го бака. Найти процентное содержание кислоты в обоих баках.

Листок 3. Функции и графики.

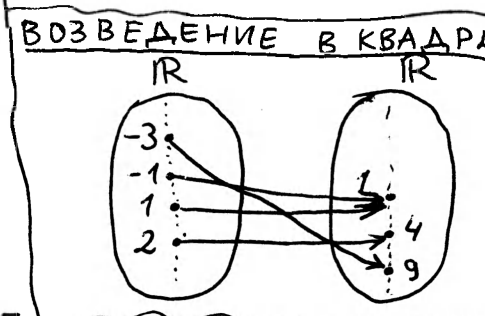
Напоминание. Пусть имеются множества A и B и каждому элементу множества A сопоставлен (ровно один) элемент множества B. В таком случае говорят, что задана функция, отображающая множество A в множество B. Если f – функция, отображающая A в B, то пишут так: $f: A \longrightarrow B$.



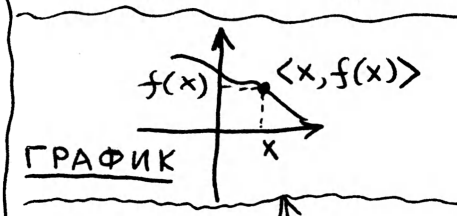
Если функция f сопоставляет элементу $a \in A$ элемент $b \in B$, то b называется значением f на a и обозначается $f(a)$. Пишут и так:
$f: a \longmapsto b$ (f переводит a в b)



Пример. Функция f, "возведение в квадрат" ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) сопоставляет каждому числу его квадрат: $f(x) = x^2$, $f: x \longmapsto x^2$.

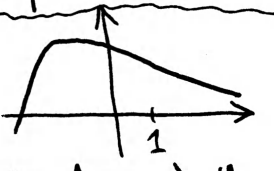


В этом листке мы будем рассматривать числовые функции – функции, у которых A и B суть некоторые множества действительных чисел. Такие функции изображаются с помощью графиков. Графиком числовой функции называется множество всех тех точек $\langle x, y \rangle$ у которых $y = f(x)$.

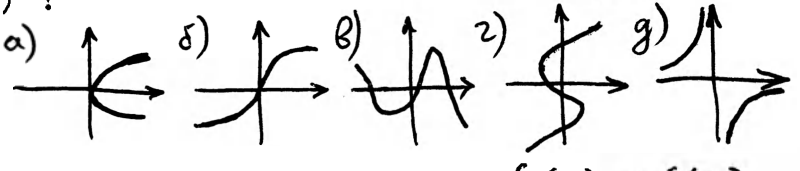


Задачи.

1. График функции f изображен на рисунке. Что больше: $f(2)$ или $f(3)$?



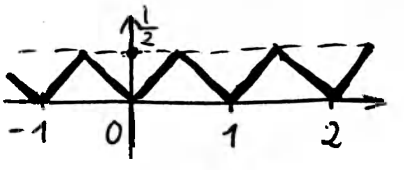
2. Какие из изображенных множеств являются графиками?



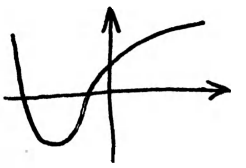
3. Функция f называется возрастающей, если $f(x) < f(y)$ при любых x и y, для которых $x < y$. Какие из функций, графики которых изображены на рисунках к задаче 2, являются таковыми?

4. Построить графики функций: а) $x \longmapsto |x|$; б) $x \longmapsto x^2$; в) $x \longmapsto [x]$; г) $x \longmapsto \{x\}$.

5*. Написать формулу (содержащую знаки $\{\ \}$ (дробная часть), $|\ |$ (модуль) и арифметические знаки), задающую функцию, график которой изображен на рисунке.

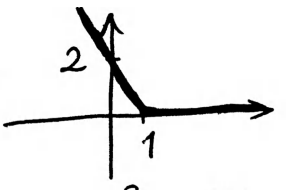


6*. Обозначим через $\min(a,b)$ и $\max(a,b)$ наименьшее и наибольшее из чисел a и b. Написать формулы для $\min(a,b)$ и $\max(a,b)$, содержащие знак модуля и знаки арифметических действий.

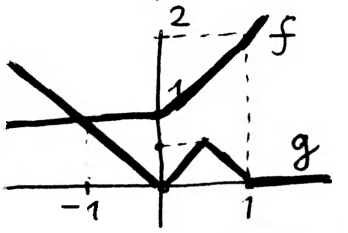


7. График функции f изображен на рисунке: Скопировать этот рисунок в 9 – 12 экземплярах и нарисовать на этих же рисунках графики функций:
а) $x \mapsto f(x)+1$; б) $x \mapsto f(x-1)$; в) $x \mapsto f(x+1)$; г) $x \mapsto f(2x)$;
д) $x \mapsto 2f(x)$; е) $x \mapsto |f(x)|$; ж) $x \mapsto f(|x|)$; з) $x \mapsto -f(x)$;
и) $x \mapsto f(-x)$; к)* $x \mapsto 1/f(x)$; л)* $x \mapsto (f(x))^2$; м)* $x \mapsto f(x)+x$.

8.* Построить график функции g, если: а) $g(x) = f(2x+1)$;
б) $g(x) = f(|x|+1)+1$;
в) $g(x) = f(f(x))$, а график f таков:



9.* Даны графики функций f и g:



Нарисовать графики функций: а) $x \mapsto f(x)+g(x)$;
б) $x \mapsto f(x)-g(x)$; в) $x \mapsto f(x)\cdot g(x)$;
г) $x \mapsto 1/f(x)$; д) $x \mapsto f(g(x))$; е) $x \mapsto g(f(x))$.

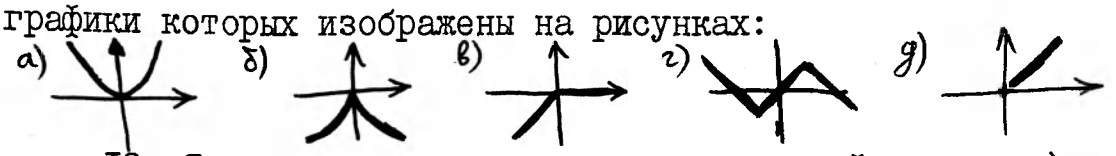
10. а) Построить на одном чертеже графики функций $x \mapsto x^2$ и $x \mapsto x+2$. Найти их точки пересечения. б) Сколько решений имеет уравнение $x^2 = x+2$?

11.* Сколько решений имеет уравнение $x^3 = 10 - x$?

Функция f, определенная на множестве M, называется <u>чётной</u>, если выполнены такие условия: (1) если $x \in M$, то $-x \in M$; (2) для всех $x \in M$ выполнено равенство $f(x) = f(-x)$;

Заменяя (2) на (2′): для всех $x \in M$ выполнено $f(-x) = -f(x)$, получаем определение <u>нечётной</u> функции.

12. Являются ли четными или нечетными функции, графики которых изображены на рисунках:



13. Являются ли четными или нечетными функции: а) $x \mapsto |x|$; б) $x \mapsto x + x^3$; в) $x \mapsto (|x|+2)^3 - 27|x|$; г) $x \mapsto x + |x|$; д)* $x \mapsto |x+1| + |x-1|$.

14. а) Доказать, что функция f является четной тогда и только тогда, когда OY является осью симметрии ее графика. (Нужно доказать: (1) если f четна, то график f симметричен; (2) если график f симметричен, то f четна.)

б) Доказать, что функция f является нечетной тогда и только тогда, когда O является центром симметрии графика f.

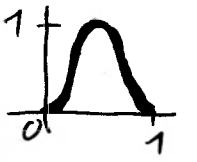
15. а) Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ четна, функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нечетна, $f(1)+g(1) = 5$, $f(-1)+g(-1) = 3$. Найти $f(1)$ и $g(1)$.

б)* Пусть $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – любая функция. Доказать, что можно найти такую четную функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и такую нечетную функцию $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ чтобы при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнялось равенство $h(x) = f(x) + g(x)$.

I6*. Существует ли функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, одновременно являющаяся возрастающей и четной?

I7. Построить графики функций: а) $x \mapsto x^2+1$; б) $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$; в) $x \mapsto 3/(x^2+1)$; г) $x \mapsto 3x^2-1$; д) $x \mapsto \frac{1}{3x^2-1}$; е) $x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$; ж)* $x \mapsto |x-1|+|x+1|$; з) $x \mapsto -(|x|+2)^2$; и) $x \mapsto |2x+1|+1$.

I8*. График функции $f: [0,1] \to [0,1]$ · изображен на рисунке.



Нарисовать графики функций

а) $g: x \mapsto f(f(x))$;

б) $h: x \mapsto f(f(f(x)))$

в) Сколько решений имеет система уравнений: $y = f(x)$, $z = f(y)$, $f(z) = \frac{1}{2}$

(Решением называется тройка чисел $\langle x, y, z \rangle$, удовлетворяющая всем уравнениям системы.)

I9*. Придумать такую функцию f, чтобы для всех $x \in \mathbb{R}$ было выполнено равенство $f(x+1) = f(x)+2$

Существуют ли две различных функции с таким свойством?

20*. Функция $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что при всех $x, y \in [0,1]$ выполнено неравенство $|f(y)-f(x)| \le (y-x)^2$.

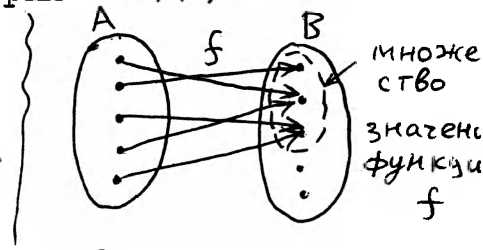
Доказать, что $f(0) = f(1)$ и, более того, f – постоянная функция (всюду равная одному и тому же числу).

2I*. Придумать такую функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы при любом $a \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = a$ имело бы бесконечно много решений.

22*. Известно, что график функции f – прямая, $-1 \le f(0) \le 1$, $3 \le f(2) < 5$. Чему может быть равно: а) $f(4)$; б) $f(-2)$?

Листок 4. Функции.

Напоминание. Пусть $f: A \to B$. Тогда множество A называется областью определения функции f, а множество всех $y \in B$, которые являются значениями функции f на некоторых $x \in A$, называется множеством значений функции f.

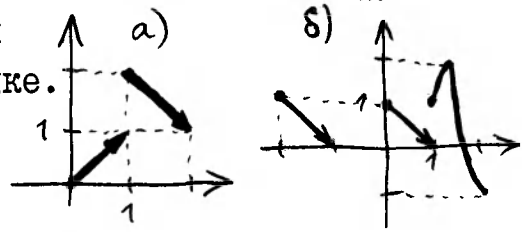


Задачи.

I. Определить множество значений функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если: а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = |x| + 1$; в) $f(x) = |x+1|$.

(Чтобы доказать, что множество значений функции f равно некоторому X, нужно доказать два утверждения: (I) все значения функции f принадлежат X; (2) любой элемент X является значением функции.)

2. Найти области определения и значений функций, графики которых изображены на рисунке.



3. Найти область значений функций:

а) $f(x) = \begin{cases} |x| \text{ при } x \in [-3, 2] \\ \text{не определено иначе} \end{cases}$

б) $g(x) = [x]$; в) $h(x) = \{x\}$.

4. Построить функции: а) с областью определения $]-1, 1[$ и областью значений $[0, 2[$; б)* с областью определения $[-1, 1]$ и областью значений $]-1, 1[$; в)* с областью определения $]-1, 1[$ и областью значений $[-1, 1]$; г)* с областью определения $]0, 1[$ и областью значений $\mathbb{R}$.

Определения. Функция $f: A \to B$ называется: а) наложением, если область значений ее совпадает с B; б) вложением, если различным элементам A соответствуют различные элементы B: из $x \neq y$ следует $f(x) \neq f(y)$; в) взаимно однозначным соответствием между A и B если она одновременно является и вложением, и наложением.

5. Какие из приведенных ниже функций являются наложениями, вложениями и взаимно однозначными соответствиями?

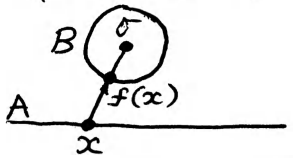
а) A = множество учеников 7б класса, B = множество всех букв русского алфавита, $f: x \mapsto$ (первая буква фамилии ученика x)

б) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $f: x \mapsto [x]$

в) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$, $f: x \mapsto x$

В пунктах г – е $A = [0,1]$, $B = [0,1]$.

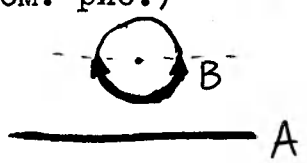
ж) A = прямая, B = окружность, $f(x)$ = точка пересечения луча Ox с окружностью.



6. Придумать взаимно однозначное соответствие $f: A \to B$, если: а) A, B – отрезки (см. рис.)

б) $A = [0,1]$, $B = [0,2]$;

в)* A – прямая, B – полуокружность (без концов), г)* $A =]0,1[$, $B = \mathbb{R}$

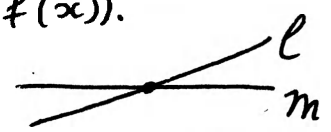


д)* $A =]0,1]$, $B = [0,1]$; е) A = множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, B = множество четных натуральных чисел; ж)* $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$; з)* $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$

Листок Д. I. Функции (дополнительные задачи).

Обозначения. Пусть $f: A \to B$, $g: B \to C$. Функция (=отображение) $x \mapsto g(f(x))$ называется композицией функций f и g и обозначается $g \circ f$. Таким образом, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

I. Прямые ℓ и m образуют угол в 7^0. Обозначим через f отображение осевой симметрии относительно ℓ, а через g – относительно m. Найти $g \circ f$ и $f \circ g$.



2. Пусть A и B – две точки, f и g – центральные симметрии относительно A и B. Найти $f \circ g$ и $g \circ f$.

3. Точка O называется центром симметрии множества M (состоящего из точек плоскости), если при центральной симметрии относительно O множество M переходит в себя. Доказать, что если множество M имеет более одного центра симметрии, то оно имеет бесконечно много центров симметрии.

4. Рассмотрим 8 отображений плоскости в себя, задаваемых (в координатах) формулами $\langle x, y\rangle \mapsto \langle \pm x, \pm y\rangle$ (4 варианта) и $\langle x, y\rangle \mapsto \langle \pm y, \pm x\rangle$ (4 варианта). Убедиться, что композиция любых двух отображений этого списка снова входит в список, и составить таблицу умножения (из 8 строк и 8 столбцов).

5. Взаимно однозначное отображение (=функция) $f: A \to A$, где A – конечное множество, называется перестановкой множества A. Обычно в качестве A берут множество $\{1, 2, \ldots, k\}$ и перестановку записывают в виде таблицы из двух строк; например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ или, короче, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ обозначает перестановку, переводящую 1 в 3, 3 в 1, а 2 и 4 – в себя. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Найти перестановку f множества $\{1,2,3,4\}$, для которой $f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

7. Доказать, что для любой перестановки f найдется такое n, что $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}} = e$ (через e обозначена тождественная перестановка, оставляющая все числа на месте). Наименьшее такое n называется порядком перестановки f.

8. Существуют ли перестановки множества $\{1,2,3,4,5\}$, имеющие порядок: а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 7?

9. Найти число перестановок множества из k элементов.

10. Транспозицией называется перестановка, меняющая два числа местами и оставляющая все остальные числа на месте. Доказать, что если композиция n транспозиций равна e, то число n четно.

11. Доказать, что всякая перестановка представляется в виде композиции транспозиций.

I2. Согласно задаче II, всякая перестановка f может быть представлена в виде произведения (=композиции) некоторого числа транспозиций. Таких представлений может быть, конечно, много. Доказать, что либо во всех них четное число транспозиций (тогда f называется <u>четной</u> перестановкой), либо во всех них нечетное число транспозиций (тогда f называется <u>нечетной</u> перестановкой). Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных перестановок четно, а произведение четной и нечетной перестановок нечетно.

Учет решенных задач _____ (фамилия, имя)

номера	I	2	3	4	5	6	7	8а	8б	8в	8г	8д	9	I0	II	I2
записаны																
приняты когда																
кем																

Свободное место в концах листков мы будем использовать для задач олимпиадного характера. Быть может, Вы захотите попробовать свои силы на их решении.

Замостить треугольник отрезками. (Это означает, что нужно указать такое множество отрезков, чтобы каждая точка треугольника лежала ровно на одном из них.) Решить ту же задачу для круга.

На сколько частей делят плоскость 20 прямых, любые две из которых пересекаются и никакие три из которых не имеют общей точки?

Из каждой вершины треугольника проведен отрезок, соединяющий ее с некоторой внутренней точкой противоположной стороны. Доказать, что середины этих отрезков не могут лежать на одной прямой.

Плоскость раскрашена в два цвета. Возможно ли, чтобы любая пара точек, находящихся друг от друга на расстоянии I см, была закрашена: а) одинаково; б) по-разному?

Точки A и B находятся на плоскости на расстоянии 5,3 см. Блоха может прыгнуть в любом направлении, но ровно на I см. Может ли она из A допрыгнуть в B ?

Нарисовать какой-нибудь многоугольник и точку внутри него так, чтобы ни одна сторона не была видна из этой точки полностью.

Один выпуклый четырехугольник помещен внутри другого. Может ли сумма диагоналей внутреннего быть больше суммы диагоналей внешнего?

Разделить угол в I9 градусов на I9 равных частей с помощью циркуля и линейки.

Можно ли замостить доску I0 на I0 прямоугольниками I на 4 ?

На плоскости нарисован выпуклый I982-угольник, разбитый на I98I треугольник. Доказать, что можно провести прямую так, чтобы отсечь ровно один из этих треугольников.

Несколько окружностей разбивают плоскость на части. Нужно покрасить некоторые части белой краской, а остальные - черной, причем так, чтобы любые соседние (имеющие общую границу) части были покрашены по-разному. Докажите, что это всегда возможно.

Квадратный трехчлен: график и простейшие свойства

Напоминаем, что графиком функции f называется множество точек плоскости с такими координатами $\langle x, y\rangle$, что $y = f(x)$.

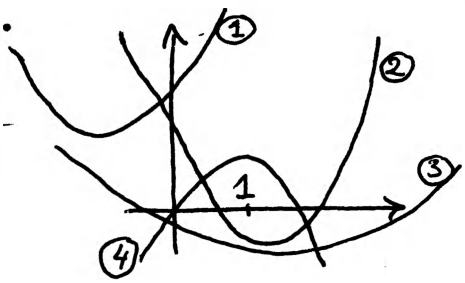
I. Постройте графики функций $x \mapsto (x-5)^2$, $x \mapsto x^2-5$, $x \mapsto 5x^2$.

2. Найдите a, b и c, если график функции $x \mapsto ax^2+bx+c$ получается сдвигом графика функции $x \mapsto x^2$ на 3 единицы вправо и на 5 единиц вниз.

3. Рассмотрим функцию "растяжение (вдоль оси x) в 2 раза", переводящую точку $\langle u, v\rangle$ в точку $\langle 2u, v\rangle$. Применим её ко всем точкам графика функции $x \mapsto x^2$. График какого квадратного трехчлена получится?

4. Преобразованием гомотетии с коэффициентом k называется отображение (=функция) $\langle u, v\rangle \mapsto \langle ku, kv\rangle$. Найдите преобразование гомотетии, переводящее график $x \mapsto x^2$ в график $x \mapsto ax^2$.

5. Определите знаки a, b и c для квадратных трехчленов вида ax^2+bx+c, графики которых изображены на рисунке.



6* Определите знак числа $a+b+c$ для квадратных трехчленов из предыдущей задачи.

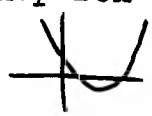
7. Нарисуйте график $x \mapsto x^2-2x$. При каких a уравнение $x^2-2x=a$ имеет решение?

8. При каких c система уравнений $y = x^2$, $y = x+c$ имеет единственное решение? Нарисуйте графики $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x+c$ при этих c.

9. Нарисуйте (на одном рисунке) множества точек $\{\langle x,y\rangle \mid y = x^2\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid x = y^2\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid y = \sqrt{x}\}$

I0. Нарисуйте графики функций $x \mapsto 0.001x^2$ и $x \mapsto 1000x+1$ Сколько точек пересечения они имеют?

II.* Найдите такое c, что при всех $x > c$ выполнено неравенство $0.001x^2 - 1000x - 1000 > 1000000$.



I2. Нарисуйте множества $\{\langle x,y\rangle \mid y = ax^2+b|x|+c\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid y = |ax^2+bx+c|\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid |y| = ax^2+b|x|+c\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid |y| = |ax^2+b|x|+c|\}$ если график функции $x \mapsto ax^2+bx+c$ изображен на рисунке.

I3.* Докажите, что если квадратный трехчлен ax^2+bx+c принимает целые значения при всех целых значениях x, то $2a$, $a+b$ и c – целые числа. Докажите, что верно и обратное: если $2a$, $a+b$ и c – целые числа, то во всех целых точках значения функции – целые.

I4. Какая прямая является осью симметрии графика $x \mapsto x^2+px+q$? Каково наименьшее значение функции $x \mapsto x^2+px+q$?

I5.* Найти x, при котором выражение $(x-a_1)^2+\ldots+(x-a_n)^2$ принимает наименьшее значение.

Квадратный трехчлен: график и простейшие свойства (продолжение)

16. В равнобедренный треугольник с основанием $2a$ и высотой h вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на основании, а две другие – на боковых сторонах. Какую наибольшую площадь может иметь этот прямоугольник?

17.* Назовем уклонением квадратного трехчлена на отрезке $[a, b]$ наибольшее значение его модуля на этом отрезке. Найти квадратный трехчлен, старший коэффициент которого равен 1, имеющий наименьшее возможное уклонение (1) на отрезке $[-1, 1]$ (2) на отрезке $[1, 2]$

18.* Доказать, что квадратный трехчлен со старшим коэффициентом 1 не может принимать в трех целых точках значения, лежащие в интервале $]0, 1[$.

Квадратный трехчлен и квадратные уравнения

Напомним, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ при $a\neq 0$ имеет два корня, если $\mathcal{D}=b^2-4ac>0$, один корень, если $\mathcal{D}=0$ и не имеет корней, если $\mathcal{D}<0$. Корни можно найти по формуле

$$x_{12}=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$$

1. (Теорема, обратная к теореме Виета) Пусть a, b – любые числа, $p=-(a+b)$, $q=ab$. Доказать, что квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни a и b и не имеет других корней.

2. (Теорема Виета) Пусть квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни a и b. Доказать, что $p=-(a+b)$, $q=ab$. (Указание. Можно воспользоваться формулой корней квадратного уравнения, но можно и "поделить на $x-a$", т.е. записать $x^2+px+q=(x-a)(x+(p+a))+q+a(p+a)$ и затем подставить $x=a$ и $x=b$.)

3. Придумать квадратное уравнение с корнями (1) 1 и 2; (2) 0 и 3.

4. Верны ли такие утверждения: (1) если корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ различны и рациональны, то p и q рациональны; (2) если корни квадратного уравнения различны и иррациональны, то p и q иррациональны.

5. Известно, что $x+y=a$, $xy=b$. Выразить через a и b (1) x^2+y^2 (2) x^3+y^3 (3) x^4+y^2 (4) $1/x^2+1/y^2$

6.* Даны попарно различные числа x_1, x_2 и x_3 и число a. Построить квадратичную функцию f, для которой $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$, $f(x_3)=a$.

7.* Доказать, что через любые три точки плоскости, никакие две из которых не лежат на одной вертикальной прямой, можно провести график квадратного трехчлена. (Указание. Трижды воспользуйтесь предыдущей задачей).

8.* (Продолжение) Докажите, что такой график единствен.

9.* Доказать тождество: $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1$.
(Указание. Эту задачу можно решить устно, используя задачу 8.)

Квадратный трехчлен и квадратные уравнения (продолжение)

I0. Нарисуйте на плоскости множество тех точек $\langle p, q\rangle$, для которых уравнение $x^2+px+q=0$ (I) не имеет корней; (2) имеет один корень; (2) имеет 2 корня.

II.* Нарисуйте на плоскости множество тех точек $\langle p, q\rangle$, при которых уравнение $x^2+px+q=0$ (I) имеет корень 0; (2) имеет один положительный и один отрицательный корень; (3) имеет хотя бы один положительный корень.

I2. Нарисуйте на плоскости множество тех точек $\langle a, b\rangle$, при которых уравнение $ax^2+bx+1=0$ имеет ровно один корень.

I3.* Уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней и $a+b+c<0$. Найти знак числа c.

I4.** Где может лежать вершина (точка плоскости, соответствующая минимальному значению) квадратного трехчлена x^2+px+q, если один его корень не превосходит I, а другой меньше или равен 2 ?

I5.** Придумать способ, позволяющий, не решая уравнений $x^2+px+q=0$ и $x^2+mx+n=0$, ответить на вопрос: верно ли, что оба уравнения имеют по 2 корня, причем между корнями каждого из них имеется корень другого?

I6. Числа x и y – корни уравнения $t^2+pt+q=0$. Составить уравнение, корнями которого являются (I) x^2, y^2 (2) x/y, y/x. (Коэффициенты нового уравнения должны быть выражены через p и q.)

I7.* Та же задача, но корнями нового уравнения являются $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ (известно заранее, что $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$).

I8.* Рассмотрим всевозможные квадратные трехчлены вида $f(x)=x^2+px+q$, для которых $f(1)=3$, $f(3)<1$. Найти множество всех возможных значений таких трехчленов в точке $x=-1$.

I9. При отрезании квадрата со стороной I от прямоугольника, меньшая сторона которого равна I, образуется прямоугольник, подобный исходному, т.е. имеющий то же отношение сторон. Найти стороны исходного прямоугольника. (Он называется прямоугольником"золотого сечения".)

20.** Сколько решений в целых числах имеет уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{666}$?

2I.* Доказать, что если $x+y\in\mathbb{Q}$ и $xy\in\mathbb{Q}$, то $x^n+y^n\in\mathbb{Q}$.

22.* Один из корней квадратного уравнения с рациональными коэффициентами равен $1+\sqrt{2}$. Найти второй корень.

23.* Может ли квадратное уравнение с рациональными коэффициентами иметь корень $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?

24.* Тот же вопрос для $\sqrt[3]{2}$.

25.* При каких a справедливо такое утверждение: для всех x из интервала $]-1, 1[$ выполнено неравенство $x^2+ax+\frac{1}{4}>0$?

Листок 5. Действительные числа: сложение.

Мы сформулируем сейчас несколько основных свойств (аксиом) действительных чисел и операций над ними, принимаемых без доказательства. Все остальные свойства мы будем доказывать, исходя из них.

Аксиомы сложения. Для любых двух чисел x и y определена их сумма, обозначаемая $x+y$. Для каждого числа x определено противоположное число, обозначаемое $-x$. Среди чисел имеется число ноль, обозначаемое 0. Выполнены такие свойства: для всех x, y и z

C1. $x+y=y+x$ (коммутативность)

C2. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (ассоциативность)

C3. $x+0=x$

C4. $x+(-x)=0$

Из этих аксиом можно вывести много разных следствий (теорем).

Пример. Теорема. $((a+b)+c)+d=a+(b+(c+d))$

Доказательство. $((a+b)+c)+d=(a+b)+(c+d)=a+(b+(c+d))$

Первое равенство следует из C2, если $x=a+b$, $y=c$, $z=d$, второе – если $x=a$, $y=b$, $z=c+d$.

Задачи.

1. $0+x=x$
2. $a+(b+c)=b+(a+c)$
3. (Правило сокращения.) Если $a+b=a+c$, то $b=c$.
4. Если $a+x=b$, то $x=(-a)+b$
5. Если $x+y=0$, то $x=-y$
6. $-(-x)=x$
7. $-(x+y)=(-x)+(-y)$

Обозначения. По аксиоме C2 можно писать $x+y+z$, не указывая порядка; по теореме из примера можно писать $x+y+z+u$, также не указывая порядка действий. Аналогично можно писать $a+b+c+d+e$ и т.д. Выражение $a+b-c+d-e$ означает $a+b+(-c)+d+(-e)$ и т.п. Из аксиом можно вывести такое

Правило раскрытия скобок. При раскрытии скобки, перед которой стоит знак $-$, знаки внутри скобки меняются на противоположные.

8. Обосновать правило раскрытия скобок в таком примере: $a-(b-c)=a-b+c$
9. Вычислить $1-(2-(3-(4-(5-(6-\ldots-(1980-(1981-1982))\ldots)))))$

10*. Определим новую операцию $\oplus$, положив $a\oplus b=\frac{a+b}{1+ab}$. Выполнены ли свойства C1 и C2 для такого "сложения"? Выполнено ли свойство $(a\oplus b)\oplus(c\oplus d)=((d\oplus a)\oplus c)\oplus b$?

11*. Придумать другие множества с операцией, обладающие свойствами C1 – C4. Например, можно рассматривать числа, не равные нулю и считать "суммой" произведение. Что тогда нужно считать "противоположным"и "нулем", чтобы свойства C1 – C4 были выполнены?

12*. Петя утверждает, что вывел из свойств C1 – C4 такое: если $x+x=0$, то $x=0$. Докажите, что его "вывод" содержит ошибку.

Листок 6. Действительные числа: умножение.

Аксиомы умножения. Для любых чисел x, y определено их произведение, обозначаемое xy. Для каждого числа x, не равного 0, определено обратное число, обозначаемое $\frac{1}{x}$. Среди чисел имеется число единица, обозначаемое I. При любых x, y и z

У1. $x \cdot y = y \cdot x$ (коммутативность)

У2. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (ассоциативность)

У3. $x \cdot 1 = x$

У4. Если $x \neq 0$, то $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

У5. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (дистрибутивность)

У6. $1 \neq 0$, $1 + 1 \neq 0$, $1 + 1 + 1 \neq 0$, ...

У7. $0 \cdot x = 0$

Задачи.

I. $((a \cdot b) c) \cdot d = a \cdot (b \cdot (c \cdot d))$

2. (Правило сокращения на ненулевое число) Если $x \cdot y = x \cdot z$ и $x \neq 0$, то $y = z$.

3. Если $x \cdot y = 0$, то $x = 0$ или $y = 0$.

4. Если $x \cdot y = 1$, то $\frac{1}{y} = x$.

5. Если $y = \frac{1}{x}$, то $x = \frac{1}{y}$.

6. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

7. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

8. $a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$

Обозначения. Число $a \cdot \frac{1}{b}$ обозначается $\frac{a}{b}$. Это обозначение имеет смысл при $b \neq 0$. Если $a \neq 0$, то $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$.

Правила действий с дробями (задачи 9 – I6)

9. (Равенство) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

I0. (Сокращение) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, если $c \neq 0$.

II. (Сложение дробей с одним знаменателем) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

I2. (Сложение дробей с разными знаменателями) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

I3. (Вычитание) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

I4. (Умножение) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

I5. (Деление) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

I6. (Равенство нулю) Пусть $b \neq 0$. Тогда $\frac{a}{b} = 0$ в том и только том случае, когда $a = 0$.

I7*. Вывести У7 из аксиом У1 – У6 и аксиом С1 – С4.

I8. Доказать, что если $x + x + x = 0$, то $x = 0$. (Указание. См. У6.)

Листок 7. Действительные числа: порядок.

Всякое действительное число, не равное нулю, либо положительно, либо отрицательно. Никакое число не может быть положительным и отрицательным одновременно. Ноль не является ни положительным, ни отрицательным. Выполняются такие свойства:

П1. Если x положительно, то $-x$ отрицательно. Если x отрицательно, то $-x$ положительно.

П2. Если x и y положительны, то $x+y$ и $x \cdot y$ положительны.

П3. Число 1 положительно.

Задачи.

1. Если x отрицательно, а y положительно, то $x \cdot y$ отрицательно. (Указание. См. свойство П1.) Если x и y отрицательны, то $x \cdot y$ положительно.

2. Число x^2 не может быть отрицательным.

3. При всех x и y число x^2+y^2+1 положительно.

4. При всех x число x^2+2x+2 положительно.

5. Докажите, что если $(x-y)^2+(2x+y-3)^2=0$, то $x=1$, $y=1$.

6*. Вывести П3 из П1 и П2.

7*. Числа a, b, c, d, e, f не равны нулю. Доказать, что среди чисел ab, ac, bd, $-ce$, $-df$, $-ef$ есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное.

Определения. Число a больше b ($a>b$), если $a-b$ положительно. Число a меньше b ($a<b$), если $a-b$ отрицательно. Очевидно, всегда выполнено одно из трех: $a<b$, $a=b$, $a>b$; $a<b$ тогда и только тогда, когда $b>a$, $a>0$ тогда и только тогда, когда a положительно, $a<0$ тогда и только тогда, когда a отрицательно. Обозначения: $a \geqslant b$ означает "$a>b$ или $a=b$", $a \leqslant b$ означает "$a<b$ или $a=b$".

8. Если $a<b$, $b<c$, то $a<c$.

9. Если $a<b$, c – любое число, то $a+c<b+c$.

10. Если $a<b$, $c>0$ то $ac<bc$.

11. Если $a<b$, $c<0$ то $ac>bc$.

12. Если $a<b$, $c<d$, то $a+c<b+d$.

13. Если $a>0$, то $\frac{1}{a}>0$; если $a<0$, то $\frac{1}{a}<0$.

14. Если $a>b>0$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

15. Если $a<b$, $c<d$, то $a-d<b-c$

16. Если $a>b>0$, $c>d>0$ то $ac>bd$.

17. Если $x>0$, $y>0$, n – натуральное число, большее 0, то свойства $x>y$ и $x^n>y^n$ равносильны.

18. Известно, что $x^3=2$, $y^7=5$, $x,y>0$ Что больше: x или y?

19. Если $x^{1983}>0$, то $x>0$.

20. Верны ли такие утверждения: а) $\frac{a}{b} \geqslant 0 \Rightarrow ab \geqslant 0$;
б) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b} \Rightarrow a<b$; в) $a^2 \leqslant b^2 \Rightarrow |a| \leqslant |b|$?

Листок 8. Действительные числа: доказательство неравенств.

Доказать, что при всех значениях переменных:

1. $a(a-b) \geqslant b(a-b)$.
2. $a^2 - ab + b^2 \geqslant ab$.
3. если $x > 0$, то $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
4. если $a+b=1, a,b>0$, то $ab \leqslant \frac{1}{4}$.
5. если $0 \leqslant a \leqslant 1, b \geqslant 1$, то $a+b \geqslant 1+ab$
6.* $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$.
7.* если $a+b+c=1$, то $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.
8. Доказать, что при любом $x > 0$ выполнено $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ а) при $n=2$; б) при $n=3$; в)* при любом натуральном n.
9.* Найти такое k, чтобы а) $(1,001)^k \geqslant 1983$ (Указание. См. задачу 8.); б) $(0.999)^n \leqslant 1/1983$.
10. $[a]+[b] \leqslant [a+b]$ (напомним, $[x]$ – целая часть x).
11.* Доказать, что если $a \geqslant 1$, $b+c < a+1$, $c \geqslant b$, то $a > b$.
12. (Неравенство Коши.) (А) Если $a, b > 0$, $ab = 1$, то $a+b \geqslant 2$. (Б)* Если $a, b, c > 0$, $abc = 1$, то $a+b+c \geqslant 3$. (Указание. Переставляя a, b, c можно считать, что $a \leqslant 1$, $b \geqslant 1$. Затем воспользуйтесь (А) и задачей 5.)
13. Известно, что процент психов среди математиков больше, чем среди нематематиков. Доказать, что процент математиков среди психов больше, чем среди нормальных людей.
14. Города A и B расположены на реке, $AB = \ell$. Катер, собственная скорость которого равна v, вышел из A вдоль по течению, дошел до B, повернул назад и вернулся в A. Доказать, что время, затраченное им, больше, чем $\frac{2\ell}{v}$ (время, необходимое, если течения нет).
15. Едет колонна автобусов. Автобус считается переполненным, если в нем едет более 50 пассажиров. Докажите, что процент пассажиров, едущих в переполненных автобусах, не меньше процента переполненных автобусов.
16. Докажите, что площадь прямоугольника не больше площади квадрата с тем же периметром.
17.* В трех сосудах налито по 1 л смеси кислоты с водой. Процентное содержание кислоты в них равно 20%, 40% и 70%. Какое наибольшее количество 50%-го раствора можно составить, смешивая их?
18.* Найти такое n, чтобы $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 1983$
19.* Доказать, что при всех n $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1$ (Указание. $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$)
20. Известно, что сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,001?
21. Придумать десять чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ так, чтобы $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{10}$, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = 1$ и чтобы x_4 было как можно больше. (Докажите, что Ваш способ – наилучший!)
22. Доказать, что функция $x \longmapsto \frac{1+x}{1+2x}$, рассматриваемая на множестве $[0, +\infty[$ – убывающая.

Логика, множества, функции

Обозначения. Через $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ обозначаются объединение, пересечение и разность множеств A и B .

$A \subset B$ означает, что любой элемент множества A является элементом множества B . $A = B$ означает, что $A \subset B$ и $B \subset A$.

1°. Какие из следующих утверждений верны для любых A , B , C ? (1) $(A \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$; (2) если $A = B \cup C$, то $A \setminus B = C$; (3) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$; (4) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

2°. Пусть A - множество треугольников, стороны которых удовлетворяют соотношению $c^2 = a^2 + b^2$; B - множество треугольников, у которых угол, противолежащий стороне c , прямой. Верно ли, что $A \subset B$? Верно ли, что $B \subset A$? Какое из этих утверждений называется теоремой Пифагора?

3°. Известно, что всякий рекурсивный ординал конструктивен. Можно ли заключить из этого (не зная ничего более об ординалах), что всякий неконструктивный ординал нерекурсивен? что всякий нерекурсивный ординал неконструктивен?

4°. Контрольная называется легкой, если в каждом варианте каждую задачу решил хотя бы один ученик. Контрольная называется простой, если в каждом варианте есть ученик, который решил все задачи. Может ли легкая контрольная быть не простой? Может ли простая контрольная быть не легкой?

5. Предположим, что: (а) среди людей, имеющих телевизоры, не все являются малярами; (б) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров. Следует ли отсюда, что (в) не все владельце телевизоров каждый день купаются в бассейне?

6°. Последовательность чисел a_1 , a_2 ,... называется ограниченной, если существует такое число C , что $|a_i| \leq C$ при всех i . Дать определение неограниченной последовательности, не употребляя слово "не".

7. Обозначим через $|X|$ число элементов множества X .

(а)° Найти $|A \cap B|$, если $|A| = 5$, $|B| = 7$, $|A \cup B| = 10$.

(б)* Найти $|A \cup B \cup C|$, если $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$, $|A \cap B| = p$, $|B \cap C| = q$, $|A \cap C| = r$, $|A \cap B \cap C| = t$.

8. Найти выражение (если такое есть), содержащее буквы A и B и знаки $\cup$, $\cap$, $\setminus$, чтобы при $A = \{0,1,2\}$ и $B = \{0,1,3\}$ оно было равно: (1) $\{2\}$; (2) $\{0,1\}$; (3) $\{2,3\}$; (4) $\{1,3\}$.

9.** Дано 10 множеств. Подсчитаем число k различных множеств, которые можно получить из этих 10 многократным применением операций $\cup$, $\cap$ и $\setminus$ (в любом порядке и количестве). В зависимости от выбора исходных множеств число k может принимать разные значения. Указать все возможные значения k .

Напомним, что функция $f: A \to B$ называется вложением, если $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$, и наложением, если для любого $y \in B$ существует $x \in A$, при котором $f(x) = y$. Функция, являющаяся одновременно вложением и наложением, называется взаимно однозначной.

Пусть $f: A \to B$, $A_1 \subset A$. Назовем образом множества A_1 множество всех элементов вида $f(x)$ при всех $x \in A_1$. Пусть $f: A \to B$, $B_1 \subset B$. Назовем прообразом множества B_1 множество всех тех $x \in A$, для которых $f(x) \in B_1$.

I0. Какие из следующих утверждений верны, если $f: A \to B$, $A_1, A_2 \subset A$, $B_1, B_2 \subset B$?

(I) образ $(A_1 \cap A_2)$ = образ $A_1 \cap$ образ A_2;
(2) образ $(A_1 \cup A_2)$ = образ $A_1 \cup$ образ A_2;
(3) прообраз $(B_1 \cap B_2)$ = прообраз $B_1 \cap$ прообраз B_2;
(4) прообраз $(B_1 \cup B_2)$ = прообраз $B_1 \cup$ прообраз B_2;
(5) если f - вложение, то прообраз (образа A_1) = A_1;
(6) если f - наложение, то прообраз (образа A_1) = A_1.

Композицией функций $f: A \to B$ и $g: B \to C$ называется функция $g \circ f: x \mapsto g(f(x))$

II°. Найти композицию $g \circ f$, если: (I) $f: x \mapsto 2x - 3$ $g: x \mapsto 1/(x-1)$; (2) $g: x \mapsto 2x-3$, $f: x \mapsto 1/(x-1)$; (3) $f: x \mapsto 1/(x-a)$, $g: x \mapsto 1/(x-b)$

I2. Функии вида $x \mapsto ax+b$ называются линейными, вида $x \mapsto ax^2+bx+c$ - квадратичными, вида $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ - дробно-линейными. Верно ли, что (I) композиция двух линейных функций линейна; (2) двух квадратичных функций - квадратична; (3) двух дробно-линейных функций - дробно-линейна?

I3. Пусть $g(x) = ax+b$ и $f(x) = 2x+1$. При каких a и b функции f и g коммутируют, то есть $f \circ g = g \circ f$?

I4. Тот же вопрос, что в I3, если $f(x) = x^2$, $g(x) = ax + b$.

Если $f: A \to B$ - взаимно однозначная функция, то имеется единственная обратная функция $g: B \to A$, для которой $g(f(x)) = x$ при всех $x \in A$ и $f(g(y)) = y$ при всех $y \in B$. Она обозначается f^{-1}.

I5. (а)° Пусть $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \mid x > 0\}$, график f изображен на рисунке. Построить график f^{-1}.

(б) Пусть $f: A \to B$, $g: B \to A$, $g(f(x)) = x$ при всех $x \in A$. Можно ли утверждать, что f взаимно однозначна и $g = f^{-1}$?

I6.** Найти I0 различных дробно-линейных функций f, для которых $f(f(x)) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме конечного числа.

№ I7.* Если функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ взаимно однозначна и $f \neq id$ (через id обозначается тождественная функция, для которой $id(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{N}$), то найдется такое n, что $f(n) < n$.

I8.* Пусть $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ - взаимно однозначная функция. Доказать, что для любых рациональных p и q, для которых $p < q$, найдет-

ся такое рациональное $x \in]p,q[$, что $f(x) > 1983$

19.** Доказать, что любая функция $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ может быть представлена в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где f_1, f_2 и f_3 - взаимно однозначные функции из $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{Q}$.

20.** Существует ли взаимно однозначная функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой $f(2x+1) = 3f(x)+1$ при всех $x \in \mathbb{N}$?

21. Пусть A, B - числовые множества. Говорят, что функция $f: A \to B$ строго возрастает, если $f(x') > f(x)$ при $x' > x$. Существует ли взаимно однозначная **строго** возрастающая функция $f: A \to B$, если: (а)* $A = \mathbb{R}$, $B = [0,1]$; (б)* $A = \mathbb{Q}$, $B =]0,1[\cap \mathbb{Q}$; (в)** $A = \mathbb{Q}$, B = множество всех чисел, разлагающихся в конечную десятичную дробь, т.е. чисел вида $m/10^k$, где $m \in \mathbb{Z}$.

22.** На плоскости нарисовано бесконечное число точек; некоторые пары точек соединены линиями. Доказать, что либо существует бесконечное множество точек, любые два элемента которого соединены линией, либо существует бесконечное множество точек, никакие два элемента которого не соединены линией.

23.** Все конечные последовательности 0 и I разбиты на 2 класса. Доказать, что любую бесконечную последовательность 0 и I можно разрезать на такие куски, что все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежат одному классу.

24.* Доказать, что из II любых бесконечных десятичных дробей можно выбрать две такие, которые совпадают в бесконечном числе разрядов.

25.* Пусть X - конечное множество, $f: X \to X$. Доказать, что существует такое n, что $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n раз) имеет неподвижную точку (такую точку x, что $f \circ f \circ \ldots \circ f(x) = x$).

26.* Если f - взаимно однозначное отображение конечного множества, то найдется такое n, что $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} = id$

27.* Найти все: а) линейные б) возрастающие функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых $f \circ f(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

28.** Найти все дробно-линейные функции f (т.е. функции вида $x \longmapsto (ax+b)/(cx+d)$), для которых $f(f(x)) = x$ для всех x, кроме конечного числа.

29.** Придумать два бесконечных множества натуральных чисел A и B так, чтобы любое натуральное число представлялось единственным образом в виде суммы $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

30.** Доказать, что всякое отображение $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, для которого $f(x+y) = f(x) + f(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{Q}$ имеет вид $x \longmapsto ax$ при некотором $a \in \mathbb{Q}$.

Равномощность множеств.

Определение. Множества A и B равномощны, если существует взаимно однозначная функция $f : A \to B$. Множество A счетно, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$.

1°. Доказать равномощность интервала $]0,1[$ и прямой $\mathbb{R}$.

2°. Доказать равномощность интервала $]0,1[$ и отрезка $[0,1]$. (Если эта задача окажется трудной, см. ниже задачу № 9)

3°. Доказать счетность множества $\mathbb{Z}$ целых чисел и множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

4°. Доказать счетность множества всех конечных последовательностей натуральных чисел.

5. Доказать равномощность множества A_{01} всех бесконечных последовательностей 0 и 1 и множества A_{0123} всех последовательностей из 0,1,2,3.

Как говорят, отношение "быть равномощными" является отношением эквивалентности. Это означает, что оно рефлексивно (каждое множество равномощно самому себе), симметрично (если A равномощно B, то B равномощно A) и транзитивно (если A равномощно B, B равномощно C, то A равномощно C).

6.(а)° Объединение двух счетных множеств счетно. (б)° Объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ счетного числа счетных множеств A_i счетно.

7°. Бесконечное подмножество счетного множества счетно.

8°. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

9°. Доказать, что если A бесконечно, а B конечно или счетно, то $A \cup B$ равномощно A. (Указание. Использовать 8.)

10°. Доказать, что множества $[0,1]$ и $[0,1] \cup [2,3]$ равномощны.

11. Доказать, что если A и B счетны, то множество $A \times B$, состоящее из всех пар $\langle a, b \rangle$ с $a \in A$, $b \in B$, счетно.

12. Доказать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.

13*. Имеется некоторое множество непересекающихся интервалов, вложенных в отрезок $[0,1]$. Доказать, что оно конечно или счетно.

Счетные множества являются "наименьшими" среди бесконечных множеств. Следующая задача показывает, что далеко не все бесконечные множества счетны.

14*. Доказать, что множество A_{01} всех бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно. (Указание. (Желающие решать задачу сами не должны его читать!) Пусть это множество счетно и мы занумеровали все последовательности 0 и 1: первая, вторая,... Как теперь построить последовательность, которую мы пропустили? Постройте последовательность, которая отличается от i-ой на i-ом месте.)

Множества, равномощные множеству всех бесконечных последовательностей 0 и 1, называются множествами мощности континуума.

15.* Доказать, что множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ имеет мощность континуума.

16.* Доказать, что множество $A_{01} \times A_{01}$ имеет мощность континуума.

17.* Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей 0,1,2 имеет мощность континуума.

18.* Доказать, что множества и равномощны.

При решении задач 17 и 18, так же как и в некоторых следующих задачах, может оказаться полезной такая

Теорема (Кантор, Бернштейн) Пусть A и B – два множества. Если A равномощно некоторому подмножеству B_1 множества B, а B равномощно некоторому подмножеству A_1 множества A, то множества A и B равномощны.

Эта теорема довольно трудная. Ей разрешается пользоваться без доказательства. См. также задачу 26.

19.** Доказать, что $[0, 1]$ имеет мощность континуума. (Принять без доказательства, что каждое действительное число от 0 до 1 однозначно задается бесконечной десятичной дробью, не имеющей 9 в периоде.)

20.** Доказать, что квадрат (внутренность ∪ граница) имеет мощность континуума.

21.* Доказать, что если X и Y имеют мощность континуума, то множества $X \cup Y$ и $X \times Y$ имеют мощность континуума.

22.* Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуума.

23.** Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуума.

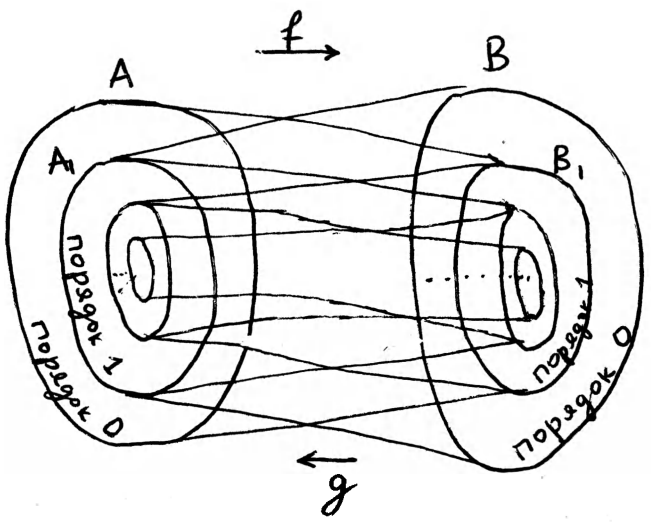
24.** Доказать, что если квадрат представлен в виде объединения двух множеств X и Y, то хотя бы одно из них имеет мощность континуума.

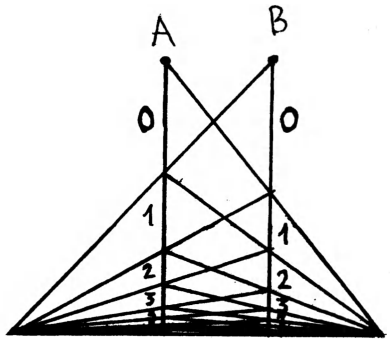
Следующая теорема показывает, что для любого множества A можно построить множество "большей" мощности (смысл слова "больше" мы пока не уточняем).

25.** Теорема Кантора. Докажите, что множество A и множество $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств множества A не равномощны, каково бы ни было множество A. (Указание. Пусть f – вложение A в $\mathcal{P}(A)$; покажите, что f – не наложение, рассмотрев множество $\{x \mid x \notin f(x)\}$.)

Частным случаем этой теоремы является утверждение задачи 14. (Почему

26.** Докажите теорему Кантора – Бернштейна. Указание. Пусть $f : A \to B_1 \subset B$ и $g : B \to A_1 \subset A$ – взаимно однозначные функции. Пусть $x \in A$. Определим последовательность x_0, x_1, ... положив $x_0 = x$, $x_1 =$ прообраз x_0 при отображении g, $x_2 =$ прообраз x_1 при отображении f, $x_3 =$ прообраз x_2 при отображении g и т.д. Если построение оборвется на n-ом шаге, то есть если x_{n+1} построить не удастся, будем называть n порядком элемента x. Если построение будет продолжаться неограниченно долго, то назовем x элементом бесконечного порядка. Пусть $A_{чет}$, $A_{неч}$ и $A_{бес}$ – множества элементов четного, нечетного и бесконечного порядков (соответственно) в A, а $B_{чет}$, $B_{неч}$ и $B_{бес}$ – аналогичным образом определенные подмножества в B. Докажите, что f устанавливает взаимно однозначное соответствие между $A_{чет}$ и $B_{неч}$, g – между $B_{чет}$ и $A_{неч}$, и любая из функций f и g – между $A_{бес}$ и $B_{бес}$. Выведите отсюда утверждение теоремы Кантора – Бернштейна.





27.** Назовем восьмеркой объединение двух касающихся (внешним образом) окружностей. Пусть на плоскости задано множество восьмерок, никакие две из которых не пересекаются. Доказать, что это множество конечно или счетно.

28.** Имеется счетное множество A и некоторое семейство подмножеств этого множества. Может ли оно быть несчетным, если:

(а) любые два элемента семейства имеют конечное пересечение;

(б) для любых двух элементов X, Y семейства $X \subset Y$ или $Y \subset X$;

(в) для любых двух элементов X, Y семейства множество $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ конечно ?

29.** Доказать, что множество всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ несчетно и не имеет мощности континуума.

Целые числа

I. Делимость.

Напоминания. (Буквы a, b... обозначают целые числа.) Говорят, что a делится на b, если существует такое c, что $a = b \cdot c$. Вместо "a делится на b" говорят также "a кратно b", "b делит a", "b – делитель a". Пишут так: $a \vdots b$ (читается: a делится на b) и $a \not\vdots b$ (a не делится на b).

Верны ли такие утверждения (задачи I – 2):

I. (а) Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $a+b \vdots c$ и $a-b \vdots c$. (б) Если $a \not\vdots c$ и $b \not\vdots c$, то $a+b \not\vdots c$. (в) Если $a \not\vdots c$ и $b \vdots c$, то $a+b \not\vdots c$. (г) Если $ab \vdots c$, то $a \vdots c$ или $b \vdots c$.

2. (а) Если $a \vdots$ I5, $b \vdots$ 2I, то $ab \vdots$ 3I5 (=I5·2I). (б) если $a \vdots$ I5, $a \vdots$ 2I, то $a \vdots$ 3I5.

Докажите (задачи 3 – 6), что

3. Если $a^2 \vdots (a+b)$, то $b^2 \vdots (a+b)$ (Указание. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.)

4. При любом n число $n(n+1)$ четно (=делится на 2).

5. При любых a и b число $a^3 + b^3$ делится на $a+b$.

6*. При любых n число $7^{2n} - 4^{2n}$ делится на 33.

7*. Число a четно и не делится на 4. Доказать, что количество четных делителей числа a равно количеству нечетных делителей числа a (Указание: установить взаимно-однозначное соответствие между чётными и нечётными делителями).

2. Остатки.

Напоминания. Пусть a, b – любые (целые) числа, $b > 0$. Число a можно разделить с остатком на b, то есть представить в виде $a = k \cdot b + r$, где $0 \le r < b$. Такое представление единственно. Здесь k называется неполным частным, r – остатком.

Пример. Числа 25 и –5 дают при делении на 6 остаток I.

I. Нарисовать все числа от – 20 до 20, дающие остаток 2 при делении на 7.

2. Найти остаток от деления числа (– I50) на I9.

3. При делении I00 на a получили остаток 6. Чему может быть равно a? (Дать обоснованный ответ.)

4. Доказать, что (остатки от деления a и b на c равны) $\Leftrightarrow (a - b \vdots c)$

5. Доказать, что числа n и $100n$ дают одинаковые остатки при делении на II.

6. (а) Число a дает при делении на 5 остаток 2, число b – остаток 4. Какие остатки дают (при делении на 5) числа $a+b$ и $a \cdot b$ (ответ и обоснование)?

(б) Заполнить таблицы, указывающие остатки от деления на 5 чисел $a+b$ и $a \cdot b$ (остатки от деления a и b указаны по горизонтали и вертикали).

a \ b	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Остатки (продолжение)

(в) Какие остатки могут давать точные квадраты при делении на 5 ? (г)* Доказать, что a^5 и a дают одинаковые остатки при делении на 5. (д) Пользуясь таблицей, докажите, что если $ab \vdots 5$, то $a \vdots 5$ или $b \vdots 5$.

Задача 6 показывает, что для нахождения остатков от деления $a+b$ и $a \cdot b$ на 5 не нужно знать сами a и b : достаточно знать их остатки. (Разумеется, 5 можно заменить на любое число.)

7. Доказать, что любое натуральное число дает такой же остаток при делении на 9, как и сумма его цифр. Вывести отсюда признаки делимости на 9 и на 3.

8. Найти остаток от деления $3n^2+8n+5$ на n при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

9. Найти остаток (а) от деления 3^{100} на 7; (б) от деления 8^{100} на 7.

10. Было 7 кусков бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 кусков. После этого некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 7 кусков и так сделали несколько раз. Могло ли получиться 1983 куска?

11. Какой остаток дает число n^2+3n+5 при делении на $n+1$ при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$?

12. Доказать, что из любых 8 целых чисел можно выбрать 2 таких, что их разность делится на 7.

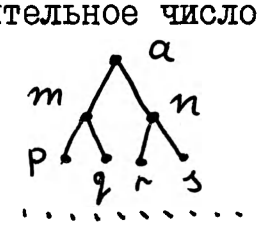
13. (а) Верно ли, что из любых 100 чисел можно выбрать 15 таких, что разность любых двух из выбранных делится на 7 ? (б) Тот же вопрос для 16 чисел вместо 15. (в) Верно ли, что из 100 чисел всегда можно выбрать 2 таких, у которых сумма делится на 7 ?

14. Может ли число делиться на 8, а при делении на 12 давать остаток 10 ?

15.* Даны 1982 числа. Доказать, что можно выбрать несколько из них так, чтобы сумма выбранных делилась на 1982.

3. Простые числа.

Напоминания. Положительное число p называется простым, если у него нет делителей, кроме ± 1 и $\pm p$ и $p \neq 1$ (Таким образом, 1 не считается простым числом.) Число, не являющееся простым и не равное 1, называется составным. Всякое положительное число можно разложить в произведение простых: если a не простое, то a имеет делитель m, т.е. $a = m \cdot n$; можно считать $m, n > 0$; если



m и n уже простые, то все доказано, если нет, то разложим их дальше и т.д. (Процесс кончится, так как числа уменьшаются!) Как мы докажем впоследствии (п. 6), разложение на простые множители однозначно (любые два разложения одного и того же числа отличаются лишь порядком сомножителей).

1. Найти все простые p, при которых $p+1$ - простое.

2. Петя придумал новую теорему: при всех $n \geq 0$ число n^2+n+41 простое. Верна ли его теорема?

3. (а) Найти все простые p, для которых $p+2$ и $p+4$ тоже простые. (б)* Найти все простые p, для которых $p+2$ - простое.

4. Найти все простые p, для которых $p+1$ - точный квадрат.

5. Докажите, что четырехзначное число, не имеющее одного из двузначных делителей, кроме ± 1, простое.

6. (а) Докажите, что числа 100!+2, 100!+3,..., 100!+100 составные. (100! = 1·2·...·100). (б) Докажите, что для всякого N имеется N подряд идущих составных чисел.

7.* Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть простое число или 1.

8. (а) Постройте число, которое дает остаток 1 при делении на любое из чисел от 2 до 100. (б) (Евклид) Докажите, что простых чисел бесконечно много. (Указание. Пусть все простые числа меньше N. Рассмотрите число, дающее остаток 1 при делении на все числа от 2 до N и получите противоречие.)

4. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа.

Пусть a, b - целые числа. Число d называется общим делителем чисел a и b, если $a \vdots d$, $b \vdots d$. Наибольшее из таких d обозначается НОД(a, b) и называется наибольшим общим делителем чисел a и b. (Если $a = b = 0$, то все числа являются общими делителями a и b и НОД(a, b) не определен.) Числа a и b называются взаимно простыми, если НОД(a, b) = 1 (т.е. если у a и b нет общих делителей, кроме ± 1).

1. Докажите, что если НОД(a, b) = d, то числа a/d и b/d целые и взаимно просты.

2. Чему равен НОД(a, b), если $a \vdots b$?

3. На числовую ось нанесите точки x, для которых НОД$(x, 12) = 2$.

4. Какое наибольшее количество одинаковых букетов можно составить из (а) 24 белых и 40 красных георгинов; (б) m белых и n красных георгинов?

5. Докажите, что (а) числа n и $n+1$; (б) числа $n+1$ и $2n+3$ взаимно просты. (Указание. $2n+3 = 2(n+1)+1$.)

6. Доказать, что НОД(a, b) = НОД($a - b$, b).

7. Доказать, что если $1982a = 1983b + 1$, то a и b взаимно просты.

8*. Доказать, что любые два числа в последовательности $2 + 1$, $2^2 + 1$, $2^4 + 1$, $2^8 + 1$, $2^{16} + 1$,... взаимно просты. (Указание. $(2^8 - 1) = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)$.)

5. Алгоритм Евклида.

Основная лемма. Пусть a, $b > 0$, a дает при делении на b остаток r. Тогда НОД(a, b) = НОД(b, r).

Набросок доказательства. Достаточно доказать, что любой общий делитель пары (a, b) является общим делителем пары (b, r) и наоборот. В самом деле, если $a = bq + r$, $a \vdots d$, $b \vdots d$, то $r = a - bq \vdots d$. Обратно, если $r \vdots d$, $b \vdots d$, то $a = bq + r \vdots d$.

Алгоритм Евклида. Будем называть преобразованием Евклида переход от пары (a, b) с $a > b > 0$ к паре (b, r), где r – остаток от деления a на b. Согласно Основной лемме, преобразование Евклида не меняет наибольшего общего делителя. Поэтому при поисках НОД(a, b) можно использовать преобразование Евклида и искать НОД получившейся пары.

Пример. (42,30) ⟶ (30,12) (остаток от деления 42 на 30 равен 12)
(30,12) ⟶ (12,6) (остаток от деления 30 на 12 равен 6)
(12,6) ⟶ (6,0) (остаток от деления 12 на 6 равен 0)
Поэтому НОД(42,30) = НОД(30,12) = НОД(12,6) = НОД(6,0) = 6.

1. Найти НОД(525,231).

2. Над прямоугольником со сторонами a и b, $a > b$, разрешается делать такую операцию: отрезать квадрат со стороной b. (а) На какие квадраты будет разрезан прямоугольник $141 \cdot 324$ в результате многократного применения этой операции? (б) Доказать, что любой прямоугольник с целыми сторонами будет в конце концов разрезан на квадраты, и найти сторону наименьшего из них. (в)* Верно ли, что любой прямоугольник (не обязательно с целыми сторонами) будет в конце концов разрезан на квадраты?

3. Имеются две большие бочки с водой и две банки на 210 г и 370 г воды. Разрешается наполнять банку в одной бочке и выливать в другую. Используя результаты применения алгоритма Евклида ((370, 210) → (210,160) → (160,50) → (50,10)), придумать способ перелить из первой бочки во вторую 160 г, 50г, 10 г. Можно ли с помощью наших банок перелить 75 г ?

4. Блоха прыгает по прямой, совершая короткие прыжки (21 см) и длинные (37 см). Используя алгоритм Евклида, найдите способы, позволяющие блохе сдвинуться на 16 см, 5 см и 1 см.

5. При дележе добычи два фальшивомонетчика, печатавшие бумажки по 21 руб. и 37 руб., решили, что один из них должен другому 1 руб. Как им рассчитаться, если у обоих есть только напечатанные ими деньги ?

6.Теоретические следствия алгоритма Евклида. Основная теорема арифметики.

1. Пусть $a, b > 0$, d - общий делитель чисел a и b. (а) Докажите, что все числа, получающиеся при применении алгоритма Евклида к паре (a, b), делятся на d. (б) Докажите, что НОД(a, b) делится на d. Из доказанного вытекает такая

Теорема 1. Наибольший общий делитель делится на любой другой общий делитель.

2. Пусть $a, b > 0$. Назовем число c хорошим, если можно найти такие целые x и y, что $c = xa + yb$. Таким образом, c хорошее, если
- ковшами в a литров и b литров можно перелить из одной бочки в другую c литров;
- блоха, делающая прыжки в a метров и b метров, может сдвинуться на c метров;
- человек, имеющий только купюры в a рублей и b рублей, может уплатить c рублей другому, у которого имеются такие же купюры.

Докажите, что (1) Числа a и b хорошие; (2) все числа, встречающиеся при применении алгоритма Евклида к (a, b), хорошие; (3) НОД(a, b) - хорошее; (4) все числа, кратные НОД(a, b) - хорошие; (5) всякое хорошее число кратно НОД(a, b). Таким образом, верна

Теорема 2. (Существуют x и y, для которых $c = xa + yb$) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (c кратно НОД(a, b)).

Следствие. Если a и b взаимно просты, то существуют x и y, для которых $xa + yb = 1$

3. Докажите, что если $ab \vdots c$ и a взаимно просто с c, то $b \vdots c$, используя следствие из теоремы 2. (Указание. $b = b \cdot 1$; представьте 1 в виде суммы, пользуясь взаимной простотой a и c.)

4. Докажите, пользуясь утверждением задачи 3, что (а) если $ab \vdots p$ p - простое, то $a \vdots p$ или $b \vdots p$. (б) если $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \vdots p$ p - простое, то $a_i \vdots p$ при некотором i.

5. Докажите единственность разложения на простые множители: если $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_m$, то списки $p_1 \ldots p_n$ и $q_1, \ldots, q_m$ состоят из одних и тех же чисел в одинаковом количестве и отличаются лишь порядком. (Указание. Если это не так, то после сокращения всего общего в $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_m$ мы придем к противоречию с утверждением задачи 4.)

Утверждение о существовании и единственности разложения на множители называется "Основной теоремой арифметики". Оно используется в

задачах 6 - 9.

6. Доказать, используя утверждение задачи 5, что если $a : b$, $a : c$, b и c взаимно просты, то $a : bc$.

7*. Известно, что $x^m = y^n$, НОД(m, n) = I. Докажите, что существует такое z, что $x = z^n$, $y = z^m$.

8*. Докажите, что произведение наибольшего общего делителя (положительного) чисел a и b и наименьшего общего кратного этих же чисел равно $|ab|$.

9*. Докажите, что (а) если p - простое число, то не существует таких (целых) m и n, что $(m/n)^2 = p$; (б) если a - целое число, не являющееся точным квадратом, то не существует таких m и n, что $(m/n)^2 = a$.

7*. Идеалы.

В этом разделе даются другие доказательства теорем I, 2.

Определение. Множество $I \subset \mathbb{Z}$ называется идеалом, если выполнены такие свойства: (И1) $x, y \in I \Rightarrow x+y,\ x-y \in I$

(И2) $x \in I$, n - любое целое число $\Rightarrow nx \in I$.

Примеры идеалов: $\{0\}$, $\mathbb{Z}$, множество четных чисел.

I. Докажите, что если I и J - идеалы, то $I \cap J$ и $I+J = \{i+j \mid i \in I, j \in J\}$ - идеалы.

2. Докажите, что для любого идеала I найдется такое число c, что I = (множество всех кратных числа c). Такое c называется образующей идеала I.

3. Пусть $I = \{x \mid x : a \text{ и } x : b\}$. Докажите, что I - идеал. Пусть c - его образующая. Докажите, что (I) c - общее кратное a и b; (2) если c' - любое общее кратное a и b, то c' кратно c. Таким образом, $|c|$ есть наименьшее общее кратное. Мы получаем также, что

Любое общее кратное двух чисел делится на их наименьшее общее кратное.

4. Пусть $I = \{xa + yb \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Докажите, что I - идеал. Пусть d - его образующая. Докажите, что (I) d - общий делитель a и b; (2) если d' - любой общий делитель a и b то $d : d'$. (Таким образом, мы получаем, что $|d|$ = НОД(a, b). Выведите отсюда утверждения теорем I и 2 раздела 6.

5. Пусть $ab : c$ и a взаимно просто с c. Докажите, что $b : c$, рассмотрев идеал $\{x \mid xb : c\}$, установив, что он содержит a и c и что его образующая равна I. (Тем самым получено новое решение задачи 3 раздела 6.)

8. Решение уравнений в целых числах.

I. Пользуясь утверждением задачи 3 раздела 6, найдите все целочисленные точки (точки, обе координаты которых целые) на прямой $ax = by$, если (а) $НОД(a,b) = 1$; (б) $НОД(a,b) = d$.

2. Докажите, что если $c \not\vdots НОД(a,b)$, то на прямой $ax+by=c$ нет целочисленных точек, а если $c \vdots НОД(a,b)$, то они есть.

Задача 2 позволяет определить, имеет ли уравнение $ax+by=c$ целочисленные решения. Следующая задача показывает, как их найти. Можно считать, что НОД(a , b) = I (если нет, сократим все члены уравнения на НОД(a , b)).

3. Пусть НОД(a , b) = I. Тогда уравнение $ax+by=c$ имеет бесконечно много целочисленных решений; если x_0, y_0 - одно из них, то все другие можно найти по формулам $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$ (Докажите.)

4. Найти все решения уравнения $21x - 37y = 1$ (Указание. См. предыдущую задачу и задачи 3 - 5 из раздела 5.)

5. Найти все решения уравнения $21x - 37y = 1982$

6*. Найти все решения уравнений: (а) $105x + 42y = 56$; (б) $-70x + 408y = 34$.

7*. Имеются контейнеры весом I30 кг и I60 кг. Нужно полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью в 3 тонны. Как это можно сделать (указать все решения)?

8*. Найти общую формулу для чисел, дающих остаток 7 при делении на I5 и остаток I2 при делении на 25.

9*. Отметим на числовой прямой точки, дающии при делении на I2 остаток 5, синим карандашом, а точки, дающии при делении на I8 остаток I3 - красным. Каково будет наименьшее расстояние между красной и синей точками?

9*. Разные задачи.

I. Докажите, что если числа a , b , c (не равного ± 1), не имеют общего делителя (т.е. числа, на которое все они делятся), то существуют такие x, y, z , что $xa + yb + zc = 1$.

2. Доказать, что НОД($2^m - I$, $2^n - I$) = $2^{НОД(m,n)} - I$.

3. (Китайская теорема об остатках.) Пусть $a_1, \ldots, a_n$ - попарно взаимно простые положительные числа, $0 \le r_1 < a_1, \ldots, 0 \le r_n < a_n$ Доказать, что существует число A , дающее при делении на a_1 остаток r_1 , при делении на a_2 остаток r_2 и т.д.

4. Пусть применение алгоритма Евклида к паре (a , b) (с $a>b$) продолжается n шагов (последним считается тот, в котором остаток равен нулю). Доказать, что a не меньше n-го члена последовательности Фибоначчи 2,3,5,8,I3... (каждый член равен сумме двух предыдущих).

5. Имеется 35 целых чисел. Разрешается одновременно прибавить к любым 23 из них по I. Доказать, что, повторяя эту операцию, можно сделать все числа равными.

6. (Малая теорема Ферма.) Пусть p - простое число, $a \not\vdots p$. Доказать, что $a^{p-1} - 1 \vdots p$

7. Назовем положительное целое число хорошим, если оно есть сумма двух точных квадратов. (Например, $5 = 2^2 + I^2$ и $9 = 3^2 + 0^2$ - хорошие, а 7 - нет.) Докажите, что (а) произведение двух хороших чисел - хорошее; (б) простые числа, дающие остаток 3 при делении на 4 - не хорошие; (в) простые числа, дающие остаток I при делении на 4 - хорошие.

8. Найти все "пифагоровы тройки", то есть все тройки целых чисел x, y и z, для которых $x^2 + y^2 = z^2$.

9. Доказать, что произведение любых n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.

I0. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел, дающих остаток (а) 3 ; (б) I при делении на 4.

Целые числа: еще несколько задач.

① I. В треугольнике каждое число равно сумме трех стоящих над ним. Доказать, что в каждой строке, начиная с третьей, есть четное число.

```
          I
        I I I
      I 2 3 2 I
    I 3 6 7 6 3 I
```

①/③ 2. а) Доказать, что при всяком целом К число $K^7 - K$ делится на 7.
б) Доказать, что при всяком целом К и простом р число $K^p - K$ делится на р

② 3. Доказать, что число $I + I/2 + I/3 + \ldots + I/K$ не является целым ни при каком натуральном К.

① 4. Доказать, что если Р – простое число, большее 3, то число P^2 дает при делении на 24 остаток I.

④ 5. Доказать, что если $A_I, \ldots, A_P$ – целые числа, то произведение всех дробей вида $(A_K - A_M)/(K-M)$ – целое число. (В произведение входят дроби при всех К,М, при которых $I \leq M < K \leq P$.)

② 6. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с единицей всегда дает точный квадрат.

③ 7. Имеется 101 целое положительное число, все они не больше 200. Доказать, что среди них можно выбрать два числа, одно из которых делится на второе.

③ 8. Шахматист играет не менее одной партии в день и не более двенадцати в неделю. Доказать, что можно найти несколько таких дней, идущих подряд, за которые он сыграет ровно 20 партий.

③ 9. Доказать, что $t_1 + \ldots + t_n = [\frac{n}{1}] + \ldots + [\frac{n}{n}]$
где t_i – число делителей целого числа i , а $[A]$ – целая часть A .

③ 10. Обозначим через (А) ближайшее к А целое число (если их два, то берем большее). Доказать, что если N – натуральное число, то

$$N = (\tfrac{N}{2}) + (\tfrac{N}{4}) + (\tfrac{N}{8}) + \ldots$$

(сумма продолжается, пока не кончатся ненулевые слагаемые).

11. Найти четырехзначное число вида $\overline{AABB}$, являющееся точным квадратом.

①/③ 12. Найти все пары целых чисел x , y , для которых:
а) $xy = x + y$; б) $1/x + 1/y = 1/14$

② 13. Числа А и В целые, причем $A^2 + B^2 \vdots 21$. Доказать, что $A^2 + B^2 \vdots 441$ $(= 21^2)$.

② 14. Числа p и q простые. Сколько существует натуральных чисел от 1 до pq , взаимно простых с pq ?

③ 15. Доказать, что $n! \not\vdots 2^n$ при $n > 2$.

② 16. Доказать, что существует число вида III...III, делящееся на 1983.

② 17. Пронумеруем подряд все простые числа, начиная с числа 5 (считая его первым). Доказать, что каждое число будет больше своего утроенного номера.

③ 18. Доказать, что любое рациональное число между 0 и 1 можно представить как сумму обратных величин различных целых чисел.

(2) I9. Числа P и 2P + I – простые, P больше 3. Доказать, что число 3P + I – составное.

(1) 20. Доказать, что уравнение AX + BY = AB не имеет решений в целых положительных числах, если A и B – взаимно простые целые положительные числа.

(3) 2I. Доказать, что среди I6 последовательных натуральных чисел всегда есть число, взаимно простое с остальными, а среди I7 – не всегда.

(1) 22. Доказать, что если между цифрами числа I33I вставить по равному количеству нулей, то получится точный куб.

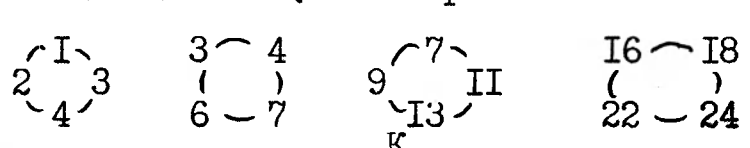
(2) 23. Доказать, что выражения 2X + 3Y и 9X + 5Y делятся на I7 при одних и тех же целых числах X и Y.

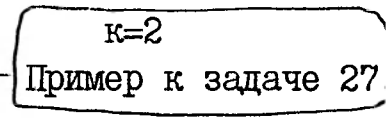
(1) 24. Найти все натуральные числа K, при которых число $2^K + I$ делится на 3.

(1) 25. Доказать, что если A и B – положительные целые числа, то число членов последовательности A, 2A, 3A,..., BA , делящихся на B, равно НОД(A,B).

(1) 26. Доказать, что при любом натуральном K число $5^K + 2\cdot3^{K-I} + I$ делится на 8.

(5) 27. По кругу написано 2^K целых чисел. С ними многократно проделывают такую операцию: между каждыми двумя числами пишут их сумму, а исходные числа стирают. Доказать, что через некоторое время останутся только четные числа. (Рассмотрите сначала малые значения k .)





(4) 28. В ряд выписаны 2^K натуральных чисел. Известно, что если выписать все простые множители этих чисел, то среди них будет не более K различных. Доказать, что из данного ряда можно выбрать несколько стоящих подряд чисел так, чтобы их произведение было точным квадратом.

(2) 29. При каких K число (K – I)! не делится на K ?

(3) 30. Пусть a , b , c , d – такие целые числа, что система уравнений $ax+by=p$, $cx+dy=q$ при всех p и q имеет целочисленные решения. Доказать, что $|ad-bc|=1$.

(1) 3I. Разобьем числа I,2,3,4,5 любым способом на две группы. Доказать, что в одной из двух групп всегда можно найти два числа, разность которых будет совпадать с одним из чисел той же группы.

(1) 32. Сумма цифр натурального числа не меняется при умножении числа на 5. Доказать, что число делится на 9.

(1) 33. Число III...III (A единиц) делится на число III...III (B единиц). Доказать, что A делится на B.

Корень.

Мы принимаем такую аксиому:

(КI) Для всякого натурального $n>0$ и всякого неотрицательного a существует неотрицательное x, для которого $x^n = a$.

I*. Докажите, что (КI) не следует из других известных Вам аксиом действительных чисел.

2. Докажите, что при любом натуральном $n>0$ и неотрицательном a число x, для которого $x \geqslant 0$ и $x^n = a$, единственно.

3. Докажите, что если натуральное число n нечетно, то при любом (в том числе отрицательном) a существует и единственно x, для которого $x^n = a$.

Обозначение. Через $\sqrt[n]{a}$ обозначается: а) при нечетном n и любом a – то единственное x, для которого $x^n = a$ (см. задачу 3) б) при четном n и неотрицательном a – то единственное x, для которого $x \geqslant 0$ и $x^n = a$ (см. задачу 2). Например, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[2]{4} = 2$ (но не -2!), $\sqrt[2]{-4}$ не определено.

4. Доказать, что при любых $a, b \geqslant 0$ и любых натуральных $m, n > 0$ справедливы равенства $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$, $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$.

5. В чем ошибка: $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

6. Построить график функции $x \longmapsto \sqrt{x^2} + \sqrt[3]{x^3}$.

7. Преобразуйте $1/(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ к виду $a\sqrt{b} + c\sqrt{d} + \ldots$, где $a, b, c, d, \ldots \in \mathbb{Q}$. (Указание. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \ldots$)

8*. Та же задача для $1/(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

9. Найдите сумму $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1982}+\sqrt{1983}}$.

I0. Упростить: $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[6]{81}$.

II*. Упростить: $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

I2*. Упростить: $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$

I3. Доказать иррациональность $\sqrt[3]{2}$ I4. То же для $\sqrt{6}$

I5. То же для $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

I6. То же для $\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$ (1983 корня)

I7**. Пусть x – корень уравнения $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами $a_{n-1}, \ldots, a_0$, причем x рационален. Доказать, что x – целое число. Вывести отсюда утверждения I3, I4.

I8*. Вывести из I7, что если $a, n \in \mathbb{N}$ и $\sqrt[n]{a}$ рационально, то $\sqrt[n]{a}$ – целое.

I9*. Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ иррационально.

20**. (Обобщение задачи I9). Доказать, что если $p_1, \ldots, p_n$ – различные простые числа, а $q_1, \ldots, q_n$ – рациональные числа, не все из которых равны 0, то $q_1\sqrt{p_1} + \ldots + q_n\sqrt{p_n}$ иррационально.

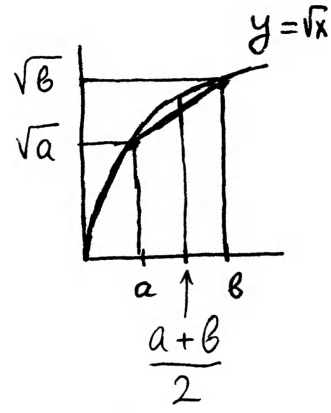
2I**. Доказать, что если $x, y, z, \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \in \mathbb{Q}$, то $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z} \in \mathbb{Q}$

22. Доказать, что при любом $n \geqslant 1$ функция $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ строго возрастает: если $x < y$, то $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.

23. Доказать, что если $m > n$, $x > 1$, то $\sqrt[m]{x} < \sqrt[n]{x}$.

24. Что больше $\sqrt{5}$ или $\sqrt[3]{11}$?

25.* Что больше: $\sqrt{3}+\sqrt{11}$ или $\sqrt{5}+\sqrt{8}$?



26. Доказать, что $\sqrt{(a+b)/2} \le (\sqrt{a}+\sqrt{b})/2$
Указать на рисунке разность правой и левой частей.

27. Доказать, что

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

(Эти величины называются гармоническим, геометрическим, арифметическим и квадратичным средними чисел a и b .)

28.** Неравенство Коши о среднем арифметическом и геометрическом.

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \le (a_1+\dots+a_n)/n$$

(Указание. См. задачу 12 листка "Доказательство неравенств")

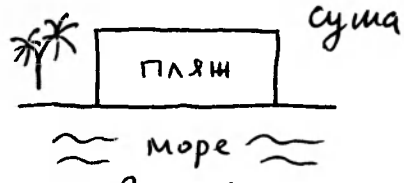
29.* Сумма n положительных чисел равна a . Какое наибольшее значение может принять их произведение?

30.* Произведение n положительных чисел равно a . Какое наименьшее значение может принять их сумма?

В задачах 29 и 30 разрешается пользоваться утверждением задачи 28.

31.** Что больше: $\sqrt[n]{n}$ или $\sqrt[n+1]{n+1}$?

32. Какая максимальная площадь может быть у прямоугольного пляжа, отгороженного забором длиной в 1 км ?



33.* Известно, что $x>0$, $y>0$ и $xy=1$ Найти максимально возможное значение выражения $2x+y$.

34.** Тот же вопрос, если заменить $xy=1$ на $xy^2=1$.

35.* Найдите такое n , чтобы $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<0.001$

36.** Найдите такое n , чтобы $\sqrt[n]{n}<1.001$

37.** Докажите, что в любом интервале с положительными концами найдется число вида $\sqrt[m]{n}$, где m и n – натуральные.

38.** Докажите, что дробная часть числа $(2+\sqrt{3})^{100}$ превосходит 0,99.

Учет решенных задач

№	1*	2	3	4	5	6	7	8*	9	10	11*	12*	13	14	15	16
записана																
когда принята																
кем																

17*	18*	19*	20**	21**	22**	**23**	24	25*	26	27	28**	29*	30*	31**	32	33*	34**

35*	36**	37**	38**

Листок Г.I. Задачи по геометрии.

В задачах I – 7 требуется доказать равенство треугольников, если в них равны некоторые отрезки и углы. (Обозначения: A, B, C – величины углов, a, в, c – длины противолежащих им сторон, m_a, m_b, m_c – медианы, проведенные к сторонам a, b, c; h_a, h_b, h_c – высоты, опущенные на стороны a, b, c.

I. a, b, m_a. 2. a, b, m_c. 3. $a, b+c, C$.

4. $b+c, C, h_a$. 5. $a, b-c, C$.

6. a, m_a, радиус описанной окружности. 7. A, h_a, m_a.

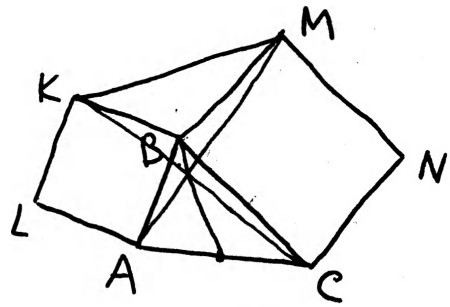
8. Доказать, что в любом треугольнике медиана, проведенная к одной стороне, меньше полусуммы двух других сторон.

9. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CH на гипотенузу AB. CM – биссектриса угла ACH, M лежит на AB. Доказать, что BM равно BC.

I0. Даны точки A, B и прямая ℓ. Найти на прямой ℓ такую точку C, чтобы: а) AC + BC было минимальным; б) AC – BC было максимальным.

II. На плоскости нарисовали несколько точек и из каждой из них провели отрезок, соединяющий ее с ближайшей к ней точкой (одинаково близких не оказалось). Могут ли некоторые из полученных отрезков: а) образовать замкнутый многоугольник; б)* пересекаться?

I2. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты ABKL и BCNM. Доказать, что: а) отрезки AM и KC равны и перпендикулярны; б) отрезок KM перпендикулярен медиане треугольника ABC, проведенной из точки B и вдвое длиннее ее.



I3.* Диагонали выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке O. Известно, что периметры треугольников AOB, BOC, COD, AOD равны. Доказать, что стороны четырехугольника ABCD равны.

I4. На кубе (многограннике, все грани которого – четырехугольники с равными сторонами и прямыми углами) из одной вершины проведены диагонали двух граней. Найти угол между ними.

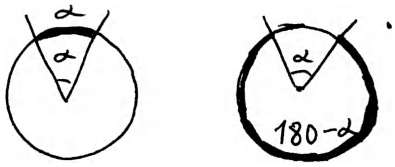
Учёт решенных задач

_____ (фамилия, имя)

номер	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0а	I0б	IIа	IIб	I2а	I2б	I3	I4
когда																	
кем																	

Листок Г.2. Задачи по геометрии. (Окружность.)

Напомним некоторые определения. Дугой называется часть окружности, заключенная между двумя точками. Величиной дуги называется величина



угла α, вершина которого в центре окружности, а стороны проходят через концы дуги, если дуга лежит внутри него, и $360^\circ - \alpha$ если дуга лежит вне угла. Касательной к окружности называется прямая, проходящая через некоторую точку A этой окружности и перпендикулярная радиусу OA. Основным фактом всего учения об окружности является такая

ТЕОРЕМА. ВЕЛИЧИНА ВПИСАННОГО УГЛА РАВНА ПОЛОВИНЕ ДУГИ, НА КОТОРУЮ ОН ОПИРАЕТСЯ.

(проходящий через центр окружности)

I. Докажите, что перпендикуляр к хорде, делит ее пополам.

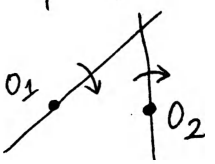
2. Две дуги, меньшие 180°, равны тогда и только тогда, когда равны стягивающие их хорды. (Рассматриваются дуги одной окружности.)

3. Две дуги, отсеченные от окружности параллельными прямыми, равны.

4. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны.

5. Дан отрезок AB и угол φ. Найти множества тех точек, из которых отрезок виден под углом: равным φ; большим φ; меньшим φ.

6. Две прямые, закрепленные в точках O_1 и O_2, вращаются со скоростью I об/мин. Какую кривую описывает точка их пересечения?



7. Для каких треугольников центр описанной окружности лежит внутри треугольника?

8. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

9. Построить касательную к данной окружности, проходящую через данную точку вне этой окружности.

I0. Построить общие касательные двух непересекающихся окружностей (их четыре!).

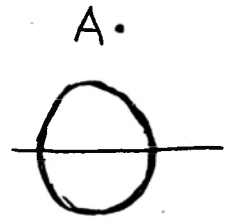
II. Окружность касается двух параллельных прямых. Под каким углом виден из центра этой окружности отрезок, отсекаемый прямыми от касательной к окружности?

I2. В середине лестницы, стоящей у стены, сидит котенок. По какой кривой он будет двигаться, когда лестница начнет скользить и падать?

I3. Окружность с центром O и радиусом r является вневписанной для треугольника ABC (точка O принадлежит углу A). Известно, что $AO = a$. Найдите периметр треугольника.

I4. Нарисуйте множество точек, из которых данный треугольник виден под тупым углом.

I5.* На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены круги. Доказать, что они покроют весь четырехугольник.



I6*. Нарисована окружность с диаметром. Пользуясь только линейкой, опустить из точки A (см. рисунок) перпендикуляр на диаметр.

I7. Доказать, что середины всех хорд окружности, проходящих через некоторую точку A, лежат на одной окружности.

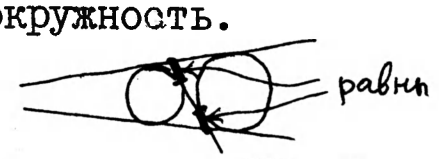
I8. (Важный факт!) Доказать, что во вписанном четырехугольнике суммы противоположных углов равны 180°.

I9. (Важный факт!) Доказать, что если в четырехугольнике сумма двух противоположных углов равна 180°, то его можно вписать в окружность.

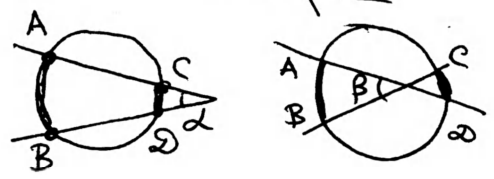
20. (Важный факт!) Доказать, что в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

2I. (Важный факт!) Доказать, что если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

22*. Доказать, что отрезки, указанные на рисунке, равны.

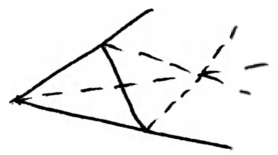


23. (Важный факт!) Доказать, что угол α равен полуразности величин дуг AB и CD, а угол β равен полусумме величин этих дуг.



24. Окружность разбита четырьмя точками на четыре дуги. Их середины обозначены (по кругу) A, B, C и D. Доказать, что $AC \perp BD$

25*. Доказать, что точка, симметричная точке пересечения высот треугольника относительно любой его стороны, лежит на описанной окружности.



26. Доказать, что биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов треугольника пересекаются в одной точке.

27*. Четыре прямые при пересечении образуют четыре треугольника. Доказать, что окружности, описанные около этих треугольников, имеют общую точку.

28. Доказать, что угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине дуги, отсекаемой этой хордой.

29. Стороны треугольника равны a, b, c. Найти отрезки, на которые они делятся точками касания со вписанной окружностью.

30. Стороны описанного шестиугольника равны II, I2, I3, I4, I5 и a (в указанном порядке). Найти a.

3I*. Перпендикуляры, опущенные ~~из вершин~~ (середин сторон) вписанного в окружность четырехугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

32*. Три окружности радиуса I пересекаются в одной точке. Доказать, что радиус окружности, проходящей через их центры, равен I.

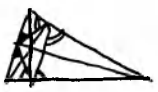
33*. На окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника ABC, взята точка M, лежащая на дуге BC. Доказать, что $AM = BM + CM$.

34.* Дана окружность и на ней три различные точки, в которых с ней пересекаются продолжения высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из одной вершины вписанного в окружность треугольника. Постройте этот треугольник.

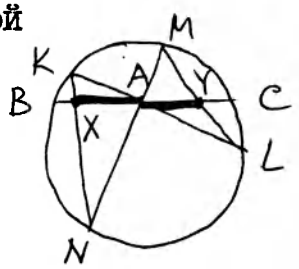
35.* Построить треугольникам по радиусам вписанной и вневписанной окружностей и периметру.

36.* Через точки A и B пересечения двух окружностей проведены две прямые. Пусть C и D – точки их пересечения с первой окружностью, E и F – со второй. Доказать, что $CD \parallel EF$.

37.* В треугольнике проведены три высоты. Доказать, что отмеченные на рисунке углы попарно равны.



38.* (Задача о бабочке.) Через середину A произвольной хорды BC окружности проведены две секущие KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от BC), KN пересекает BC в точке X, ML – в точке Y. Доказать, что $AX = AY$.



39.* Доказать, что в любом треугольнике три середины сторон, три основания высот и три точки, делящие пополам отрезки высот от точки их пересечения до вершин, лежат на одной окружности (окружность девяти точек).

40.* Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из любой точки окружности на стороны вписанного в нее треугольника, лежат на одной прямой.

41.* Окружность катится без проскальзывания по окружности вдвое большего радиуса, оставаясь внутри неё. Доказать, что любая точка внутренней окружности движется при этом по прямой.

УЧЕТ РЕШЕННЫХ ЗАДАЧ _____

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41

Листок Г.3 Задачи по геометрии

(2) I. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ на основании AC взята точка M так, что $AM=a$, $MC=b$. В треугольники ABM и CBM вписаны окружности. Найти расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BM.

(1) 2. Доказать, что прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

(1) 3. Дана окружность и точка A вне ее. AB и AC – касательные к окружности (B и C – точки касания). Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

(1) 4. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Определить расстояние между серединой отрезка AM, где M – середина BC, и точкой N на стороне CD, делящей её в отношении $CN:ND=3:1$.

(1) 5. В окружности радиуса R проведен диаметр и на нем взята точка A на расстоянии a от центра. Найти радиус второй окружности, которая касается диаметра в точке A и изнутри касается данной окружности.

(2) 6. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды равной длины. Каждая хорда делится точками пересечения на 3 равные части. Найти радиус окружности, если длина каждой из хорд равна a.

(1) 7. Найти сумму квадратов расстояний от точки M, взятой на диаметре некоторой окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд, если радиус окружности равен R, а расстояние от M до центра равно a.

(1) 8. Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров. Доказать.

(1) 9. Общаа хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти радиусы окружностей, зная расстояние между их центрами.

(2) I0. В треугольнике ABC сторона AB равна 3, а высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, длина отрезка AD равна длине стороны BC. Найти AC.

(2) II. В треугольнике ABC на наибольшей стороне AC, равной b, выбрана точка M. Найти наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и BCM.

(3) I2. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) биссектрисы внутренних углов A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D – в точке N. Докажите, что длина отрезка MN равна $1/2\,(AD+BC-AB-CD)$.

(3) I3. Из точек K, E, H, лежащих соответственно на сторонах

AB, BC и CA треугольника ABC, восставлены к этим сторонам перпендикуляры. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AK^2+BE^2+CH^2 = KB^2+EC^2+HA^2$

(2) I4. На двух смежных сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABE и BCF. Докажите, что треугольник DEF равносторонний.

(2) I5. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину C прямого угла прямоугольного треугольника ABC с центром квадрата, построенного на гипотенузе, делит угол C пополам и равен $\sqrt{2}/2\cdot(AC+BC)$.

(3) I6. На плоскости даны три точки. Построить четырехугольник, для которого эти точки были бы серединами трех последовательных равных сторон.

(3) I7. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O, причем $OC=AB$. Найти угол при вершине C.

(3) I8. Найдите угол C треугольника ABC, если расстояние от вершины C до точки пересечения высот равно радиусу описанной окружности.

(3) I9. Найдите угол C треугольника ABC, если вершина A равноудалена от центров вневписанных окружностей, касающихся сторон AB и BC.

(2) 20. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и четыре круга, каждый из которых касается одной стороны четыреугольника и продолжений двух соседних с ней сторон. Доказать, что центры этих кругов лежат на одной окружности.

(3) 2I. Даны две окружности разных радиусов, лежащие одна вне другой, и точка A на одной из них. Построить окружность, касающуюся двух данных и проходящую через точку A.

(3) 22. Даны окружность, прямая и точка A на прямой. Построить окружность, касающуюся данных прямой и окружности и проходящую через точку A.

(1) 23. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу.

(2) 24. Даны длины сторон четырехугольника $ABCD$. Построить этот четырехугольник, если известно, что диагональ AC делит угол A пополам.

(2) 25. Построить треугольник по точкам пересечения продолжений биссектрисы, медианы и высоты, выходящих из одной вершины с описанной окружностью

(1) 26. Построить параллелограмм, если известны диагональ и высоты.

(2) 27. Построить треугольник по медиане к одной стороне и высотам к двум другим.

Листок Г.4. Задачи по геометрии.

Этот листок содержит геометрические задачи, большинство из которых требует применения подобия. Напомним основные свойства подобных треугольников.

Определение. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, если $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1 = BC/B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$

Признаки подобия. Если I) $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$ или 2) $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1 = BC/B_1C_1$ или 3) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

I. Докажите, что треугольник с вершинами в серединах сторон треугольника ABC подобен треугольнику ABC.

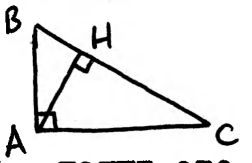
2. Дана окружность и точка O, лежащая внутри неё. Хорда AB проходит через точку O. Доказать, что $|OA| \cdot |OB|$ не зависит от выбора хорды AB. (Важный факт!)

3. Дана окружность и точка O, лежащая вне её. Прямая проходит через точку O и пересекает окружность в точках A и B. Доказать, что $|OA| \cdot |OB|$ не зависит от выбора прямой и равно квадрату отрезка касательной к окружности, проходящей через точку O. (Важный факт!)

4.* Три окружности радиуса I проходят через точку A. Доказать, что три другие точки их пересечения лежат на окружности радиуса I.

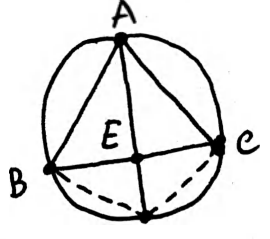
5.* Доказать, что если у шестиугольника, вписанного в окружность, две пары противоположных сторон параллельны, то и оставшиеся 2 противоположные стороны параллельны.

6. Доказать теорему Пифагора, используя подобие треугольников, изображенных на рисунке. Доказать, что $|AH|^2 = |BH| \cdot |HC|$



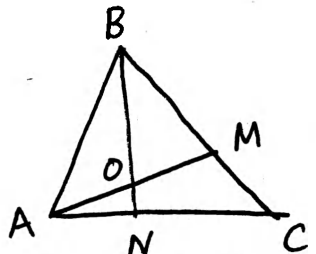
7. Докажите, что биссектриса AE треугольника ABC делит сторону BC в отношении $AB : AC$. Докажите аналогичное утверждение для биссектрисы внешнего угла. (Важный факт!)

8.* В треугольнике ABC проведена биссектриса AE. Докажите, что $|AE|^2 = |AB| \cdot |AC| - |EB| \cdot |EC|$ (Указание. Описать окружность около ABC и продолжить AE до пересечения с этой окружностью)



9.* Используя задачи 7 и 8, выразить длину биссектрисы через стороны треугольника.

I0.* Дан треугольник ABC. Из его медиан построен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан этого треугольника – треугольник $A_2B_2C_2$. Доказать, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны и определить коэффициент подобия.



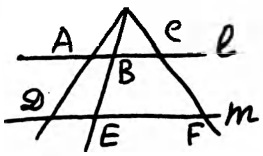
II. (См. рисунок) Найти $AO : OM$, если $AN : NC = a$, $BM : MC = b$.

I2.* В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны. Доказать, что $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

I3.* Точка A лежит внутри 6 окружностей. Доказать, что центр одной из этих 6 окружностей лежит внутри какой-то другой из них.

I4. В окружности проведены 2 радиуса. Построить хорду, которая делится ими на 3 равные части.

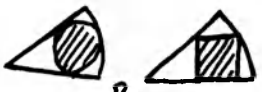
I5. Прямые ℓ и m (см. рисунок) параллельны; доказать, что $|AB| / |BC| = |DE| / |EF|$.



I6.* У шестиугольника противоположные стороны параллельны, а все диагонали, соединяющие противоположные вершины, равны. Доказать, что вокруг него можно описать окружность.

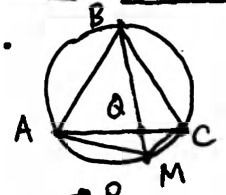
I7.* Всегда ли окружность, описанная около треугольника ABC, будет окружностью наименьшего радиуса, содержащей точки A, B и C? Если нет, то как найти окружность наименьшего радиуса с этим свойством?

I8. Построить окружность, вписанную в данный сектор круга.

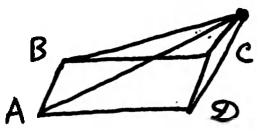


I9. Построить квадрат, вписанный в данный сектор круга.

20.* Треугольник ABC равносторонний, M – любая точка дуги AC описанной окружности. Доказать, что $1/MA + 1/MC = 1/MQ$



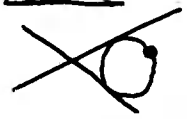
21.** Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, $\angle PBC = \angle PDC$. Доказать, что $\angle BPA = \angle DPC$.



22.* На стороне AC равностороннего треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность. Доказать, что прямые, проходящие через B и делящие эту полуокружность на 3 равные части, делят сторону AC на три равные части.

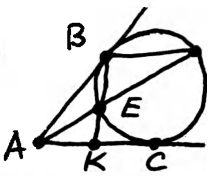
23. Построить квадрат, вписанный в данный треугольник.

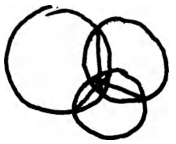
24. Построить окружность, касающуюся двух данных прямых и проходящую через данную точку. Сколько решений имеет задача?



25. Построить параллелограмм по двум сторонам и углу между диагоналями.

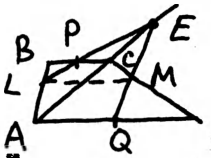
26.** Окружность касается сторон угла A в точках B и C, $BD \parallel AC$. Доказать, что $|AK| = |KC|$



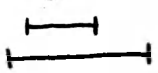


27.** Даны три пересекающиеся окружности. Доказать, что их попарные общие хорды проходят через одну точку.

28.* $ABCD$ – трапеция, P, Q – середины сторон. Доказать, что $LM \parallel AD$.



29.* Даны два параллельных отрезка. С помощью линейки (1) разделить один из них пополам; (2) удвоить второй.



Учет решенных задач листка Г.4

№	I	2	3	4*	5*	6	7	8*	9	10*	II	I2*	I3*	I4	15	16*	17	18	19	20*	21**	22*	23	24	25	26**	27**	28*	29*

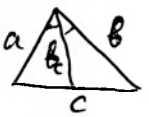
Задачи для письменных работ по геометрии.

I. Обозначим точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ через M_1 и M_2. Доказать, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2})$.

2. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$

3. Показать, что в треугольнике ABC биссектриса угла A равна $(|AB|\cdot\overrightarrow{AC} + |AC|\cdot\overrightarrow{AB})/(|AB|+|AC|)$

4. Используя предыдущую задачу, доказать, что $b_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$, где p – полупериметр.



5. Доказать, что отрезок, соединяющий вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, построенного на гипотенузе, (I) делит прямой угол пополам; (2) имеет длину, равную сумме длин катетов, умноженной на

6. Доказать, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин вписанного в нее правильного треугольника постоянна. Выразить её через сторону треугольника.

7. В треугольнике $a^2 + b^2 = 5c^2$. Доказать, что 2 медианы взаимно перпендикулярны. Верно ли обратное?

8. В треугольнике ABC единичной площади проведен отрезок AD. пересекающий медиану CF в точке M, причем $FM = \frac{1}{4}CF$. Найти площадь треугольника ABD.

9. Доказать, что если в треугольнике со сторонами a, b, c прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан, перпендикулярна c, то $a^2+b^2=2c^2$. Верно ли обратное?

I0. Стороны параллелограмма пропорциональны его диагоналям. Доказать, что углы параллелограмма равны углам между его диагоналями.

II. Выразить величину задачи 2 через стороны треугольника.

I2. В окружность вписан треугольник ABC. Биссектриса угла ACB пересекает окружность в точке S. Выразить $\overrightarrow{CS}$ через $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

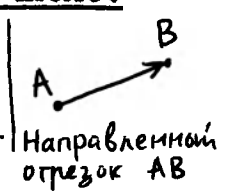
I3. Доказать, что в треугольнике со сторонами a, b, c и радиусом описанной окружности R имеет место равенство $|OH|^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$, где O – центр описанной окружности, H – точка пересечения высот.

I4. Радиус вписанной в треугольник окружности равен r, радиус описанной окружности равен R. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

Приди — и насладися благ.
Г. Р. Державин.

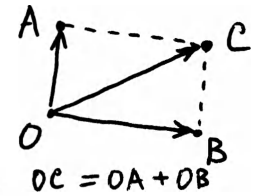
Векторы на плоскости

I. Направленные отрезки: сложение и умножение на число.



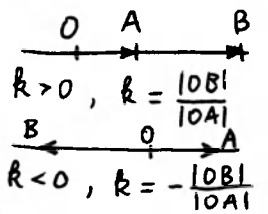
Направленный отрезок AB

Направленным отрезком называется отрезок, у которого одна из крайних точек объявлена началом, а другая – концом. Отрезок с началом A и концом B обозначается AB и изображается стрелкой. (Таким образом, AB и BA – разные направленные отрезки.)



$OC = OA + OB$

Суммой направленных отрезков OA и OB с общим началом называется направленный отрезок OC, где C – такая точка, что $OACB$ – параллелограмм.



Произведением числа k и направленного отрезка OA называется такой направленный отрезок OB, лежащий на прямой OA, что: (а) $|OB| = |k| \cdot |OA|$; (б) точки A и B лежат по одну сторону от O при $k > 0$ и по разные – при $k < 0$.

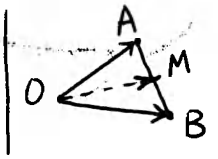
Направленный отрезок, у которого начало совпадает с концом, называется нулевым.

1. Доказать ассоциативность сложения направленных отрезков: $OA + (OB + OC) = (OA + OB) + OC$.

2. Доказать, что $x \cdot (OA + OB) = x \cdot OA + x \cdot OB$

3.* Определить разумным способом сумму $OA + OB$ в случае, если точки O, A и B лежат на одной прямой, и доказать, что $(x + y) \cdot OX = x \cdot OX + y \cdot OX$

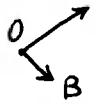
4. Дан отрезок OA. Построить отрезок OB, для которого $OA + OB$ равно нулевому отрезку OO.



5. Точка M – середина отрезка AB. Выразить OM через OA и OB.

6. Точка A принадлежит фигуре S. Где может находиться точка B, если: (1) $OB = 2 \cdot OA$; (2) $OB = (1/2) \cdot OA$; (3) $OB = (-1/2) \cdot OA$?

7. Нарисованы отрезки OA и OB. Где может находиться точка C, если $OC = OA + x \cdot OB$, x – любое?

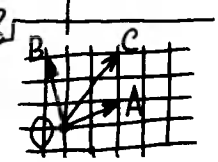


8. (Продолжение)...если $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$, $x \geq 0$, $y \leq 0$?

9. (Продолжение) ...если $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$, $0 \leq x \leq 1$, $y \leq 0$?

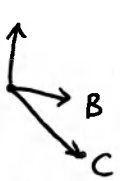
10. (Продолжение) ...если $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$?

11.* (Продолжение) ...если $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$, $x + y = 1$?



12.* Найти x и y, если $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$ Каждая клеточка – квадрат!

13. Известно, что $x \cdot OA + y \cdot OB + z \cdot OC = x_1 \cdot OA + y_1 \cdot OB + z_1 \cdot OC$; следует ли отсюда, что $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$?



2. Направленные отрезки: эквивалентность.

Направленные отрезки AB и CD эквивалентны, если $|AB| = |CD|$, $AB \parallel CD$ и AB и CD направлены в одну сторону.

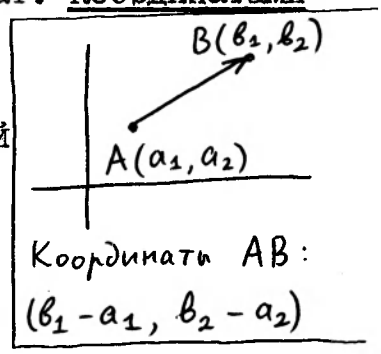
1. Доказать, что AB эквивалентен CD (запись: $AB \equiv CD$) тогда и только тогда, когда $ABDC$ – параллелограмм.

2. Доказать, что $AB \equiv CD$ тогда и только тогда, когда середины отрезков AD и BC совпадают.

3. Дана точка C и отрезок AB. Построить точку X так, чтобы выполнялось соотношение: (1) $CX \equiv AB$; (2) $XC \equiv AB$.

4*. Рассмотрим множество M всех отрезков, эквивалентных данному (направленному) отрезку. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством M и множеством всех точек плоскости.

Пусть на плоскости задана система координат. Координатами направленного отрезка AB называются числа, которые получатся, если из координат его конца вычесть координаты его начала. Например, нулевой направленный отрезок имеет координаты (0, 0).



5. Доказать, что координаты суммы направленных отрезков OA и OB равны сумме координат OA и координат OB.

6. Доказать, что координаты направленного отрезка $c \cdot OA$ получаются из координат направленного отрезка OA умножением на c.

7. Вывести из задач 5 и 6 утверждения задач 1 – 3 предыдущего пункта ("Направленные отрезки: сложение и умножение на число").

8. Доказать, что направленные отрезки эквивалентны тогда и только тогда, когда их координаты равны.

9. Даны координаты точек $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ и $C(c_1, c_2)$. Найти координаты точки D, если $AB \equiv CD$.

3. Векторы.

Вектором (точнее, вектором на плоскости) называется пара чисел (a_1, a_2). Числа a_1 и a_2 называются компонентами, или координатами, вектора (a_1, a_2). Суммой векторов $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ называется вектор $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. Произведением числа c и вектора a называется вектор $ca = (ca_1, ca_2)$. Вектор (0, 0) называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$. Вектор $(-a_1, -a_2)$ называется противоположным к вектору $a = (a_1, a_2)$ и обозначается $-a$.

1. Проверьте, что для любых векторов a, b, c выполнены равенства $a+b=b+a$, $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a+0=a$, $a+(-a)=0$.

2. Проверьте, что для любых векторов a, b и чисел k, l выполнены равенства а) $k\cdot(a+b)=k\cdot a+k\cdot b$; б) $(k+l)\cdot a=k\cdot a+l\cdot a$.

3. Дано, что $(2, 4)=x\cdot(2, 1)+y(-1, 3)$. Найти x и y.

Пусть на плоскости задана система координат. Тогда каждому направленному отрезку AB ставится в соответствие вектор, образованный из координат этого отрезка. Он обозначается $\overrightarrow{AB}$.

4. Доказать, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда $AB\equiv CD$.

Таким образом, эквивалентным направленным отрезкам ставится в соответствие один и тот же вектор. Можно сказать, что векторы – это просто "направленные отрезки, если считать эквивалентные отрезки равными". Следующие задачи показывают, что определения сложения для направленных отрезков и векторов согласованы.

5. Доказать, что если направленный отрезок OC равен сумме отрезков OA и OB, то векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ равны.

6. Доказать, что если направленный отрезок OC равен $\lambda\cdot OA$, то $\overrightarrow{OC}=\lambda\cdot\overrightarrow{OA}$.

7. Доказать, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

8. Дана точка A с координатами (a_1, a_2) и вектор $v=(v_1, v_2)$. Доказать, что существует и единственна точка B, для которой $\overrightarrow{AB}=v$. Найти её координаты. (Таким образом, от любой точки можно отложить любой вектор, причем единственным образом.)

9. На плоскости нарисован правильный шестиугольник. Рассмотрим множество всех векторов вида $\overrightarrow{AB}$, где A и B – вершины шестиугольника. Сколько элементов в этом множестве?

4. Сводка результатов.

Мы определили понятия вектора, суммы векторов, нулевого вектора, противоположного вектора, произведения числа и вектора. При этом выполняются такие свойства: (λ, μ – числа, a, b – вектора)

В1. $a+b=b+a$ В2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ В3. $a+\vec{0}=a$ В4. $a+(-a)=\vec{0}$	В5. $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ В6. $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$ В7. $1\cdot a=a$	В8. $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$. В9. $0\cdot a=\vec{0}$

Они называются аксиомами векторного пространства. Обратите внимание, что в них входят два нуля – число 0 и вектор $\vec{0}$. В следующих задачах предлагается вывести из них некоторые следствия (не обращаясь к определениям!).

1.* Вывести из аксиом (В1) – (В9), что если $a+c=b+c$, то $a=b$.

2.* Вывести (В8), (В9) из (В1) – (В6).

3.* Доказать, что $a+a=2\cdot a$.

4.* Доказать, что $(-1)\cdot a=-a$.

5.* Доказать, что если $x\cdot a=\vec{0}$ (x – число, a – вектор), то $x=0$ или $a=\vec{0}$.

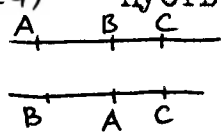
Векторы связаны с точками плоскости следующим образом. Каждой паре точек A и B соответствует некоторый вектор, обозначаемый $\vec{AB}$. При этом:

(С1) $\vec{AB}=\vec{CD}\Leftrightarrow ABDC$ – параллелограмм;

(С2) для всякой точки A и всякого вектора a существует и единственна точка B, для которой $\vec{AB}=a$;

(С3) $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$.

(С4) Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой. Тогда:



если B между A и C, то $\vec{AC}=(|AC|/|AB|)\vec{AB}$;

если A между B и C, то $\vec{AC}=-(|AC|/|AB|)\vec{AB}$

6.* Вывести из перечисленных свойств, что $\vec{AA}=\vec{0}$ и $\vec{AB}=-\vec{BA}$.

5. Задачи.

При решении этих задач следует по возможности ссылаться на перечисленные свойства векторов, а не на определения.

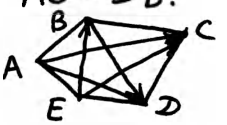
1. Доказать, что $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{0}$.

2. Доказать, что $\vec{AC}-\vec{BC}=\vec{AB}$.

3. Доказать, что свойства $\vec{AB}=\vec{CD}$ и $\vec{AC}=\vec{BD}$ равносильны.

4. Известно, что $\vec{AX}=\vec{XB}$, $\vec{CX}=\vec{XD}$. Доказать, что $\vec{AC}=\vec{DB}$.

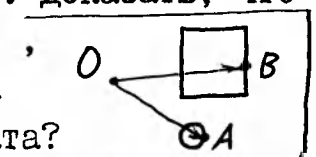
5. Выразить $\vec{AD}$ через $\vec{AC}$, $\vec{EC}$, $\vec{BD}$, $\vec{EB}$

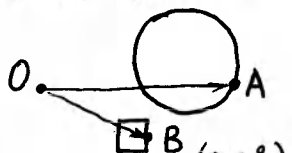


6. Дан параллелограмм $ABCD$ с центром O. Доказать, что $\vec{AX}+\vec{BX}+\vec{CX}+\vec{DX}=4\vec{OX}$ для любой точки X.

7. Известно, что $\vec{AB}+\vec{CD}+\vec{EF}=\vec{0}$. Доказать, что $\vec{AD}+\vec{CF}+\vec{EB}=\vec{0}$.

8.* Где может лежать точка X, если $\vec{OX}=\vec{OA}+\vec{OB}$, A лежит на окружности, B – на границе квадрата?



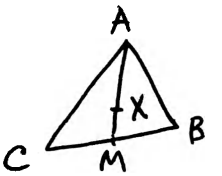


(рис. 2)

9.* Тот же вопрос, если рисунок такой (рис. 2):

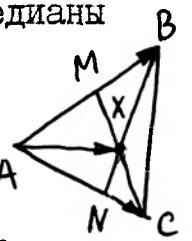
10.* Дано 10 векторов. Сумма любых 7 из них равна 0. Доказать, что все вектора равны 0.

11. Точка X делит отрезок AB в отношении $m:n$. Доказать, что $\vec{OX}=(n/m+n)\vec{OA}+(m/n+m)\vec{OB}$.
(Указание. $\vec{OX}=\vec{OA}+\vec{AX}$.)



I2. Точка X делит медиану AM треугольника ABC в отношении $2:1$. Выразить OX через OA, OB и OC.

I3. Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.



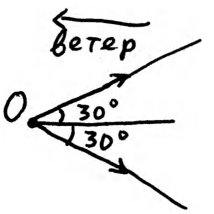
I4.* Точка M делит AB в отношении $p:q$, точка N делит AC в отношении $k:l$. Выразить $\vec{AX}$ через $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

I5. Даны 3 точки O, A и B, причем $A \neq B$. Доказать, что множество тех точек C, для которых $\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + (1-\lambda)\cdot\vec{OB}$, есть прямая AB. (Указание. $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$)

I6. (Продолжение.) Какое множество получится, если рассматривать только $\lambda \geq 0$?

I7. (Продолжение.) ... только $\lambda \in [0,1]$

I8. Парусник может плыть галсами под углом 30° против ветра в одном из двух направлений со скоростью I0 км/ч. (I) В какие точки он может приплыть из точки O? (2)*...приплыть не более чем за час? (3)* ровно за час?



I9.* Те же вопросы, если не разрешается плыть в одном направлении более 5 минут подряд.

20.* Даны три различные точки O, A, B Точка X такова, что $\vec{OX} = x\cdot\vec{OA} + y\cdot\vec{OB}$. При каких x и y точка X лежит: (I) внутри треугольника OAB? (2) на границе треугольника OAB? (Изобразить искомые множества пар $\langle x,y\rangle$ на координатной плоскости.)

2I.* Пусть имеется система точек $A_1, \ldots, A_n$, каждой из которых приписано неотрицательное число ("масса") m_i. Точка M называется центром масс системы, если для любой точки O выполнено равенство $(m_1+\ldots+m_n)\,\vec{OM} = m_1\vec{OA_1} + \ldots + m_n\cdot\vec{OA_n}$. Доказать, что центр масс всегда существует и единствен.

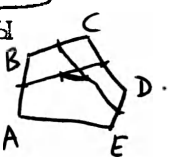
22.* Сформулировать и доказать утверждение о том, что при нахождении центра масс можно заменить часть точек одной точкой, находящейся в центре масс заменяемых точек и имеющей массу, равную сумме их масс.

23.* Где может находиться точка X, если $\vec{OX} = x\cdot\vec{OA} + y\cdot\vec{OB} + z\cdot\vec{OC}$, $x+y+z=1$, $x,y,z \geq 0$? (Указание. Где может находиться центр масс трех точек?)

24.** Где может находиться точка X, если $\vec{OX} = x\cdot\vec{OA} + y\cdot\vec{OB} + z\cdot\vec{OC} + u\cdot\vec{OD}$, $x+y+z+u=1$, $x,y,z,u \geq 0$?

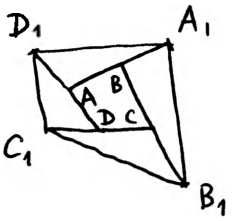
25.** Обобщить утверждение предыдущей задачи для большего числа точек.

26. Середины сторон AB и CD, BC и DE пятиугольника $ABCDE$ соединены отрезками. Середины полученных отрезков снова соединены отрезком. Доказать, что последний отрезок параллелен AE и длина его равна $(1/4)\cdot|AE|$.



27.* Построить 5-угольник по серединам его сторон.

28.* На доске был нарисован 4-угольник $ABCD$. Его стороны продолжили на расстояния, равные их длинам, получив точки A_1, B_1, C_1, D_1. После этого рисунок стерли, оставив точки A_1, B_1, C_1, D_1. Восстановить четырёхугольник $ABCD$.

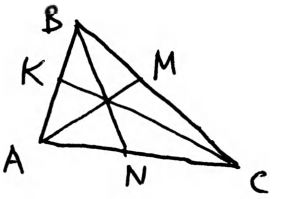


29.* Точки $X_1, \ldots, X_n$ лежат по одну сторону от прямой, проходящей через точку O. Может ли сумма $\vec{OX_1}+\ldots+\vec{OX_n}$ равняться $\vec{0}$?

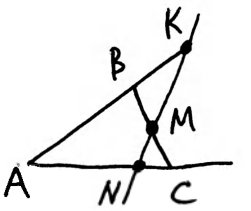
30.* Дано, что $\vec{OX_1}+\vec{OX_2}+\ldots+\vec{OX_n}=0$. Доказать, что существуют такие i и j, что угол X_iOX_j больше или равен 120°.

31.* (Теорема Чевы.) В треугольнике ABC проведены отрезки AM, BN, CK, соединяющие каждую вершину с точкой на противоположной стороне. Доказать, что эти отрезки тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда

$$(AK/KB)\cdot(BM/MC)\cdot(CN/NA)=1$$

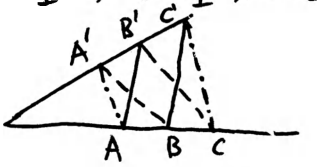


32.* На сторонах треугольника ABC и на их продолжениях взяты точки K, M, N. Доказать, что эти точки тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда $(AK/KB)\cdot(BM/MC)\cdot(CN/NA)=1$ (Теорема Менелая.)



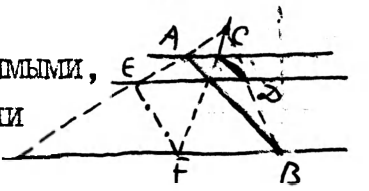
33.* (Частный случай теоремы, обратной к теореме Дезарга.) Стороны треугольника ABC параллельны соответственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

34.* (Частный случай теоремы Паскаля.) Доказать, что если $AB' \parallel BC'$ и $A'B \parallel B'C$, то $AA' \parallel CC'$



35.* (Частный случай теоремы Брианшона.) Три параллельные прямые пересечены тремя прямыми, выходящими из одной точки. Доказать, что если

$$AB \parallel CD, \text{ то } CD \parallel EF$$



36.* Доказать, что если O – центр правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, то $\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\ldots+\vec{OA_n}=\vec{0}$.

6.* Приложение. Векторы как классы эквивалентности.

Мы определяли векторы как пары чисел. При этом требовалось введение системы координат. Это не совсем хорошо, так как на плоскости *a priori* нет никаких координат. Опишем классический способ введения векторов без использования системы координат.

I.* Доказать, что множество всех направленных отрезков можно разбить на классы так, что: а) каждый направленный отрезок попадет хотя бы в один класс; б) классы не пересекаются; в) все отрезки одного класса эквивалентны друг другу; г) отрезки из разных классов не эквивалентны.

Вектором называется класс эквивалентных направленных отрезков из задачи I.

Пусть a и b – два вектора, т.е. класса эквивалентности. Определим их сумму (снова класс!) следующим образом. Выберем на плоскости точку O и направленные отрезки $OA \in a$ и $OB \in b$ (почему это можно?). Суммой $a+b$ будем считать класс, содержащий направленный отрезок $OA + OB$. Аналогично определим произведение вектора на число. Чтобы все сказанное имело смысл, нужно еще проверить, что классы $a+b$ и $x \cdot a$, определенные указанным образом, не зависят от выбора точки O и представителей OA, OB: если мы выберем их иначе, то получится тот же самый класс.

2.* Проверьте корректность введенных определений суммы векторов и произведения вектора на число.

3.* Назовем направленные отрезки AB и CD параллельными, если прямые AB и CD параллельны, а направленные отрезки AB и CD направлены в одну и ту же сторону. Проверьте, что утверждение задачи I останется верным, если заменить эквивалентность на параллельность. Назовем "стрелой" класс параллельных направленных отрезков. Можно ли определить (аналогично тому, как мы это сделали для векторов) произведение стрелы на число и сумму стрел?

4.* Проверьте все свойства векторов, указанные в "Сводке результатов".

Геометрические преобразования

А. Симметрия, сдвиг, поворот, гомотетия

Симметрия относительно прямой l – функция, переводящая каждую точку X плоскости в такую точку Y, что отрезок XY перпендикулярен прямой l и делится этой прямой пополам.

Симметрия относительно точки O – функция, переводящая каждую точку X плоскости в такую точку Y, что O – середина XY.

Сдвиг (= параллельный перенос) на AB – функция, переводящая каждую точку X плоскости в такую точку Y, что $XY = AB$, $XY \parallel AB$ и луч XY направлен в ту же сторону, что луч AB.

Поворот вокруг точки O на угол α (α – число из отрезка $[-180, 180]$) переводит каждую точку X в такую точку Y, что $OX = OY$, $\angle XOY = |\alpha|$ и Y находится в направлении против часовой стрелки от X, если $\alpha > 0$, и по часовой стрелке от X, если $\alpha < 0$.

Гомотетией с центром в O и коэффициентом k при $k > 0$ называется функция H_O^k, переводящая каждую точку X в точку Y, лежащую на луче OX, для которой $|OY| = k \cdot |OX|$. При $k < 0$ гомотетия H_O^k определяется как композиция $H_O^{|k|}$ и центральной симметрии с центром в точке O.

1. Найти $f \circ g$, если f есть симметрия относительно прямой l, а g – симметрия относительно прямой m. (Рассмотреть сучаи пересекающихся l и m и параллельных l и m.)

2. Найти $f \circ g$ и $g \circ f$, если f и g – симметрии относительно точек A и B.

3.* Найти $g \circ f$ и $f \circ g$, если f – сдвиг на AB, а g – симметрия относительно точки O.

4. Пусть f – сдвиг на AB, g – симметрия относительно прямой l. В каких случаях $f \circ g$ равно $g \circ f$?

5. Найти $f \circ g$, если g – поворот, f – осевая симметрия и ось симметрии проходит через центр поворота.

6. (1) Известно, что f – осевая симметрия и $f(A) = B$. Как найти ось симметрии? (2) Известно, что f – поворот и $f(A) = B$, $f(C) = D$. Как найти центр и угол поворота?

7. Две непересекающиеся окружности гомотетичны (одна из них переходит в другую при гомотетии). Где может находиться центр гомотетии?

8.* Найти композицию $H_A^2 \circ H_B^{0.5}$, где A и B – две произвольные точки. (Указание. Это – сдвиг.)

9.* Найти композицию $H_A^2 \circ H_B^3$, где A и B – две произвольные точки. (Указание. Это – гомотетия.)

10.* Точка O называется центром симметрии фигуры (=множества точек) F, если образ F при симметрии относительно O совпадает с F. Доказать, что если фигура имеет 2 центра симметрии, то она (1) неограниченна, т.е. не содержится ни в каком круге; (2) имеет бесконечно много центров симметрии. (Фигура предполагается непустой.)

11.* Прямая ℓ называется осью симметрии фигуры F, если образ фигуры F при симметрии относительно ℓ совпадает с F. Известно, что F имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом в 7°. Доказать, что F переходит в себя при повороте на 4° вокруг точки пересечения осей симметрии.

12.* Доказать, что если фигура имеет конечное число осей симметрии, то они пересекаются в одной точке и каждые две соседние из них образуют один и тот же угол.

13. Может ли 1983-угольник иметь центр симметрии?

14.* Чему может быть равна композиция 1983 центральных симметрий?

Мы определили поворот R_O^α на угол α вокруг O при $|\alpha| \le 180$. Легко проверить, что при $|\alpha|, |\beta| \le 180$ и $|\alpha+\beta| \le 180$ выполняется равенство $R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}$. Мы хотим определить R_O^α при любом действительном α так, чтобы $R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}$ выполнялось всегда. Пусть α – любое число. Найдем такое n, чтобы $|\alpha/n| \le 180$ (такое n существует по аксиоме Архимеда). Определим теперь R_O^α как $R_O^{\alpha/n} \circ \ldots \circ R_O^{\alpha/n}$ (n раз). Нужно проверить корректность этого определения, доказав, что если n и m – два натуральных числа и $|\alpha/n|, |\alpha/m| \le 180$, то $R_O^{\alpha/n} \circ \ldots \circ R_O^{\alpha/n}$ (n раз) $= R_O^{\alpha/m} \circ \ldots \circ R_O^{\alpha/m}$ (m раз).

15.* Сделайте это. (Указание. Рассмотрите сначала случай, когда m кратно n. Затем рассмотрите общее кратное m и n.)

16.* Докажите, что при нашем определении $R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}$ при всех α и β.

17.* Докажите, что R_O^α – тождественная функция тогда и только тогда, когда $\alpha = 360k$, где k – целое.

Б. Движения

Движением (перемещением, изометрией) называется взаимно однозначная функция $f: P \to P$ (P – множество точек плоскости), сохраняющая расстояния, т.е. такая, что $|f(X)f(Y)| = |XY|$ при всех $X, Y \in P$. (В дальнейшем мы увидим, что условие взаимной однозначности можно отбросить: всякая функция $f: P \to P$, сохраняющая

расстояния, взаимно однозначна.)

I8. Докажите, что осевая и центральная симметрии, сдвиги и повороты являются движениями. Докажите, что композиция движений и преобразование, обратное к движению – движения.

I9.* Определение движения можно дать и для функций на прямой. Именно, назовем $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ движением, если для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $|f(y) - f(x)| = |y - x|$. Доказать, что любое движение на прямой имеет вид $f(x) = x + C$ или $f(x) = -x + C$ при некотором C.

20. Доказать, что движение переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи, прямые в прямые и сохраняет углы: если f – движение, A, B, C – точки, то образ отрезка (луча, прямой) AB при f есть отрезок (луч, прямая) $f(A)f(B)$ и $\angle ABC = \angle f(A)f(B)f(C)$.

В. Классификация движений

Точка x называется неподвижной точкой функции f, если $f(x)=x$.

2I. (Теорема о трёх гвоздях.) Если движение f имеет 3 неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, то оно – тождественное (т.е. все точки неподвижны).

22. Доказать, что если движение имеет две различные неподвижные точки A и B, то оно – либо тождественное, либо симметрия относительно прямой AB.

23. Найти все движени , для которых данная точка A неподвижна (и доказать, что других не бывает).

24. Доказать, что любое движение может быть представлено в виде композиции не более чем 3 симметрий.

25. Доказать, что любая функция $f: P \to P$ (P – множество точек плоскости), сохраняющая расстояния, взаимно однозначна и, тем самым, является движением. (Указание. Доказать, что f представима в виде композиции нескольких симметрий.)

26.* Доказать, что любое движение плоскости есть либо сдвиг, либо поворот, либо скользящая симметрия – композиция осевой симметрии и сдвига, направление которого параллельно оси симметрии. (Теорема Шаля.)

Г. Ориентация

Все движения можно разбить на 2 непересекающихся класса – сохраняющих ориентацию ("не переворачивающих плоскость") и обращающих её ("переворачивающих плоскость"). Повороты (в том числе центральные симметрии) и сдвиги сохраняют ориентацию, осевые симметрии обращают её. Следующая таблица позволяет определить класс $g \circ f$, если известны классы g и f.

g \ f	сохр	обр
сохр	сохр	обр
обр	обр	сохр

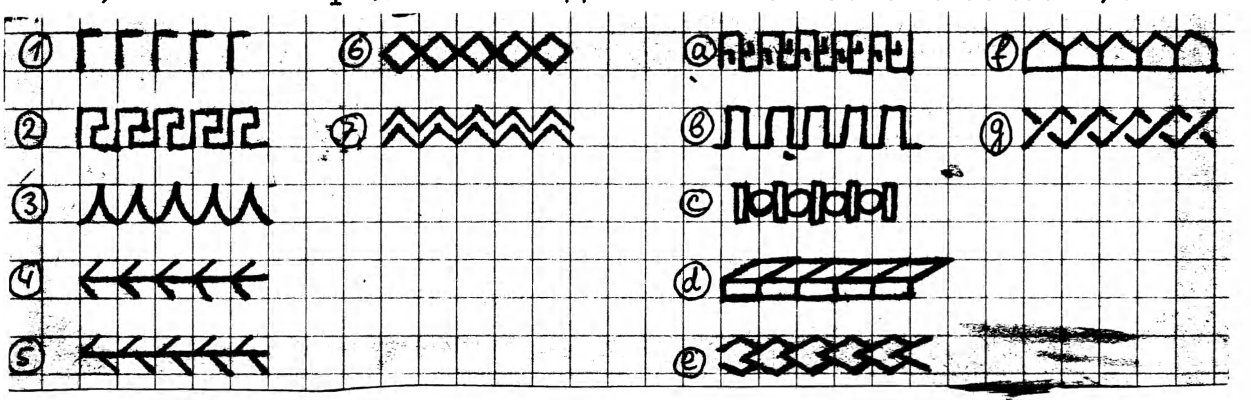
Решение некоторых из следующих задач облегчается, если использовать эти сведения. К сожалению, нам придется принять сформулированные утверждения без доказательства, так как простое и точное определение "сохранения ориентации" нам пока недоступно.

27.* Может ли композиция 1983 осевых симметрий быть поворотом?

28.* Доказать, что композиция двух поворотов с различными центрами есть либо поворот, либо сдвиг.

Д. Группа симметрий.

29. Пусть F – фигура на плоскости. Движение, при котором образом F является сама фигура F, называется симметрией фигуры F, а множество всех таких движений – группой симметрий фигуры F. Подберите для каждой картинки слева картинку справа, имеющую ту же группу симметрий (картинки предполагаются неограниченно продолжающимися; при сравнении двух картинок предполагается, что они перенесены в одно и то же место плоскости).



30. Сколько элементов имеет группа симметрий (1) разностороннего; (2) равнобедренного; (3) равностороннего треугольника?

31.* Нарисовать фигуру, группа симметрий которой содержала бы 5 элементов.

32.* Рассмотрим игру со следующими правилами. Написана конечная последовательность букв a, b, c (такие последовательности мы будем называть словами). Разрешается в любом месте заменить b на acc и наоборот, ca на $accc$ и наоборот, а также вставить или вычеркнуть aa, bb и $cccc$. Два слова P и Q назовем эквивалентными, если одно из них можно перевести по этим правилам.

$b \leftrightarrow acc$
$ca \leftrightarrow accc$
$aa \leftrightarrow$
$bb \leftrightarrow$
$cccc \leftrightarrow$

Докажите, что слова a и b не эквивалентны. Какое максимальное число попарно не эквивалентных слов можно найти? (Указание. a и b – осевые симметрии квадрата, c – поворот.)

33.* Говорят, что движение f имеет конечный порядок, если $f^n = e$ для некоторого n; наименьшее такое n называется

порядком f. (Здесь f^n есть $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n раз), а e – тождественное движение.) Например, порядок симметрии равен 2. Доказать, что если $f^k = e$ для некоторого k, то порядок f является делителем k.

Е. Конгруэнтность.

Две фигуры F и G называются конгруэнтными, или равными, если существует движение f, переводящее F в G, т.е. такое, что образ F при f равен G.

34. Докажите, что (1) если A конгруэнтно B, а B конгруэнтно C, то A конгруэнтно C; (2) если A конгруэнтно B, то B конгруэнтно A.

35.* Может ли фигура A быть конгруэнтна своей части B, т.е. такой фигуре B, что $B \subset A$, $B \neq A$?

36.* Может ли ограниченное множество на прямой быть конгруэнтным своей части? Может ли ограниченное множество на плоскости быть конгруэнтным своей части? (Множество ограничено, если оно содержится в некотором отрезке или в некотором круге.)

37.* Конгруэнтны ли множества $\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[$ и $\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{3}[$ на прямой?

38.** Представить каждое из множеств предыдущей задачи в виде объединения двух непересекающихся частей так, чтобы первая часть первого множества была конгруэнтна первой части второго, а вторая часть первого множества – второй части второго.

39.* Доказать, что если фигуры A и B конгруэнтны, то между их группами симметрий S_A и S_B можно установить взаимно однозначное соответствие $\Phi: S_A \to S_B$, сохраняющее композицию: если $f, g \in S_A$, то $\Phi(f \circ g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$. Это утверждение выражают словами: "группы симметрий конгруэнтных фигур изоморфны", а функцию Φ называют изоморфизмом.

40.* Доказать, что если A и B – две фигуры на плоскости и существует взаимно однозначная функция $f: A \to B$, сохраняющая расстояния, то эту функцию можно доопределить на точках плоскости, не входящих в A, превратив её в движение. (Отсюда следует, что фигуры A и B конгруэнтны.)

Ё. Разные задачи.

41.* Движение f таково, что $f \circ f = e$, т.е. $f(f(x)) = x$ для всех x. Доказать, что f – осевая или центральная симметрия.

42.* Движение f имеет неподвижную точку x. Доказать, что движение $g \circ f \circ g^{-1}$ (где g – любое движение) также имеет неподвижную точку.

43. Доказать, что если f - движение, то точки x, $f(x)$ $f(f(x))$, ... лежат на окружности или на одной или двух прямых.

44*. Пусть T - множество всех сдвигов, V - множество всех векторов на плоскости. Построить взаимно однозначную функцию $\Phi : T \to V$, при которой композиции в T соответствует сумма в V, т.е. $\Phi(f \circ g) = \Phi(f) + \Phi(g)$. Как связаны $\Phi(f)$ и $\Phi(f^{-1})$ при построенном f? (Утверждение о существовании функции Φ с указанными свойствами выражают словами "группа движений относительно композиции изоморфна группе векторов относительно сложения", а Φ называют "изоморфизмом" этих "групп".)

45*. Доказать, что любые два сдвига коммутируют: если f и g - сдвиги, то $f \circ g = g \circ f$.

Ж. Преобразования подобия

Функция f называется преобразованием подобия с коэффициентом k, если она взаимно однозначна и $|f(X)f(Y)| = k|XY|$ для всех X, Y. (Таким образом, преобразования подобия с коэффициентом 1 суть движения.)

46. Доказать, что гомотетия с коэффициентом k есть преобразование подобия с коэффициентом $|k|$.

47. Доказать, что любое преобразование подобия есть композиция гомотетии и движения.

48. Доказать, что преобразование подобия переводит прямые в прямые, лучи в лучи, отрезки в отрезки, окружности в окружности и сохраняет углы.

49**. На прямоугольную карту города наложена другая карта того же города, в 5 раз более мелкая. Доказать, что можно, не сдвигая карт, проколоть их иголкой так, чтобы точки прокола изображали одну и ту же точку местности.

50**. Доказать, что всякое преобразование подобия с коэффициентом $k \neq 1$ имеет единственную неподвижную точку.

З. Логическое строение геометрии.

51. Описать логическое строение (что из чего выводится) фрагмента курса геометрии, содержащего учение о равенстве и подобии фигур. Он должен включать, в частности, утверждение о том, что два треугольника конгруэнтны тогда и только тогда, когда их соответствующие стороны и углы равны, определение и признаки подобия треугольников и т.п. Тщательно следите за отсутствием порочного круга. (Указание. Без аксиомы Архимеда здесь не обойтись!)

И. Преобразования векторов

Пусть f – движение (или преобразование подобия) плоскости, a – некоторый вектор. Определим результат применения f к a. (Это – нечто новое: до сих пор мы применяли движения к точкам!) Для этого выберем произвольную точку A, отложим от неё вектор $\overrightarrow{AB}$, равный a, и результатом применения f к a объявим вектор $\overrightarrow{f(A)f(B)}$.

52.* Доказать, что результат применения определен корректно (не зависит от выбора точки A).

Таким образом, для каждого движения (или преобразования подобия) f определена функция $\bar{f}: V \to V$, сопоставляющая с каждым вектором $a \in V$ результат применения f к a. (V – множество векторов плоскости.)

53.* При каких f функция $\bar{f}$ тождественная?

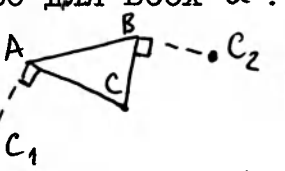
54.* Докажите, что функция $\bar{f}$ линейна. Это значит, по определению, что для всех $a, b \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$\bar{f}(a+b) = \bar{f}(a) + \bar{f}(b); \quad \bar{f}(\lambda a) = \lambda \bar{f}(a).$$

55.* Докажите, что если f, g и h суть движения (или преобразования подобия) и $h = g \circ f$ то $\bar{h} = \bar{g} \circ \bar{f}$. (Это выражают, говоря, что функция $f \mapsto \bar{f}$ есть гомоморфизм.)

56.* При каких f равенство $\bar{f}(a) = -a$ справедливо для всех a?

57.* Дан треугольник ABC. Построены точки C_1 и C_2 так, что $AC = AC_1$, $AC \perp AC_1$, $BC = BC_2$, $BC \perp BC_2$.



Доказать, что положение середины отрезка C_1C_2 не изменится, если сдвинуть точку C (оставив A и B на месте). (Указание. Как сдвинутся C_1 и C_2, если C сдвинуть на вектор h?)

58.* На сторонах треугольника ABC построены равносторонние треугольники с центрами O_1, O_2, O_3. Доказать, что треугольник $O_1O_2O_3$ равносторонний. (Указание. Если ABC равносторонний, это очевидно. Сдвиньте теперь точку B на произвольный вектор и посмотрите, на какие векторы сдвинутся другие точки.)

К. Задачи по геометрии

В предлагаемых задачах может оказаться полезным подвергнуть что-нибудь какому-нибудь преобразованию.

59. Даны два непересекающихся круга и точка, не принадлежащая ни одному из них. Через эту точку провести прямую, чтобы отрезок прямой, заключенный между кругами, делился этой точкой пополам.

60. Доказать, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. (Указание. Точка и её образ при гомотетии лежат на одной прямой с центром гомотетии.)

61. Две окружности лежат по одну сторону от прямой. Найти такую точку X, чтобы касательные, проведенные из этой точки к окружностям, образовывали с прямой равные углы.

62. На плоскости дан угол и прямая. Построить квадрат так, чтобы две противоположные вершины его лежали на двух сторонах угла, а две другие вершины – на прямой.

63.* Точки A и B лежат по одну сторону от прямой PQ. Найти такую точку X на прямой PQ, чтобы $\angle AXP = 2\angle BXQ$.

64. В зеркальный угол попадает луч света и отражается от его сторон (угол падения равен углу отражения). Доказать, что после нескольких отражений от сторон угла луч вылетит из него. Каким должен быть угол, чтобы любой луч света, в него попавший, вернулся в направлении, противоположном тому, откуда пришел?

65. Даны 3 прямые, пересекающиеся в одной точке. Построить треугольник, для которого они являются биссектрисами.

66. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Доказать, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны между собой, пересекаются в одной точке и образуют между собой равные углы.

67. По одну сторону от прямой железной дороги расположены две деревни A и B. Где надо построить платформу MN данной длины a, чтобы общая длина дорог AM и BN, соединяющих её с деревнями, была минимальной?

68. Даны две окружности и прямая. Построить прямую, параллельную данной, на которой окружности высекают равные хорды.

69.* На одной из сторон угла дана точка M. Построить на этой же стороне точку N, для которой MN вдвое больше расстояния от N до другой стороны угла.

70.* Вписать в данный треугольник другой треугольник, стороны которого параллельны трем заданным прямым.

71. Точки C_1, C_2, C_3 являются точками пересечения медиан треугольников ABD_1, ABD_2, ABD_3. Доказать, что точки C_1, C_2, C_3 тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда точки D_1, D_2, D_3 лежат на одной прямой.

72. Пусть P – произвольная точка плоскости, K, L, M симметричны точке P относительно середин D, E, F сторон AB, BC, CA треугольника ABC. Доказать, что отрезки CK, AL, BM пересекаются в одной точке Q и делятся этой точкой пополам.

73. Вписать в данный треугольник квадрат.

74. Вписать в данный угол окружность, проходящую через данную точку.

75.* Вписать в данный угол окружность, касающуюся данной окружности.

76. Даны три концентрические окружности. Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежат на данных окружностях.

77. Доказать, что точка пересечения высот, точка пересечения медиан и центр описанной окружности любого треугольника лежат на одной прямой и делят ее на отрезки, один из которых вдвое длиннее другого.

78. Провести через данную точку секущую к данной окружности так, чтобы высекаемая окружностью хорда была вдвое короче расстояния от данной точки до (ближайшей) точки пересечения секущей с окружностью.

79. Даны две окружности. Провести отрезок заданной длины, параллельный заданному направлению, концы которого лежат на заданных окружностях.

80.* Построить квадрат, если известны точки, лежащие на его сторонах.

81.* Даны три точки. Провести через них три прямые, при пересечении которых образуется треугольник, конгруэнтный данному.

82.** Дан угол и две точки внутри него. Построить равнобедренный треугольник с вершинами на сторонах угла, боковые стороны которого проходят через данные точки.

83.** В окружности даны две хорды AB и CD и на хорде CD точка Q. Найти на окружности такую точку M, чтобы прямые MA и MB высекали на хорде CD отрезок KL, делящийся в точке Q пополам.

84.** Внешним центром гомотетии двух окружностей называется центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей одну из окружностей в другую. Имеются 3 непересекающиеся окружности разных радиусов. Доказать, что их внешние центры гомотетии лежат на одной прямой.

Геометрические преобразования, с. 10 (приложение)

Задача № 1.

Даны три словосочетания таджикского языка с русскими переводами:

а/ дӯсти хуби ҳамсояи шумо - хороший друг вашего соседа
б/ ҳамсояи дӯсти хуби шумо - сосед вашего хорошего друга
в/ ҳамсояи хуби дӯсти шумо - хороший сосед вашего друга

З а д а н и е. Определите, какому русскому слову соответствует по значению каждое из четырех встречающихся здесь таджикских слов.

Задача № 2.

Перед вами диалог на новогреческом языке, записанный русскими буквами:

- Ксерете афтон тон антропон?
- Нэ, ксеро.
- Пиос инэ афтос о антропос?
- Афтос о антропос инэ о Эллинас апо тин Кипрон. То онома афту ту антропу инэ Андреас.
- Мила Эллиника?
- Фисика, мила Эллиника поли кала. Ке мила Русика.
- Ке сис, милате Русика кала.
- Охи, эго ден мило Русика. Ксеро моно мэрикус лексис ке фрасис. Мило ке графо Англика кала. Ке сис, ксерете Англика?
- Нэ, ксеро афти ти глосса.
- Афто инэ кала.

Задание. Переведите этот диалог на русский язык.

Задача № 3.

Перед нами зашифрованный русский текст.

I 2+3+4+5, 6+4+6 7+8+9+4+I0+II 2+4+I2+4+I3+I4.
I I5+6+I6+7+I6 7+8+9+I4 8+8. 6+I0+I6 7+8+9+4+8+I0
2+4+I2+4+I3+I7 I5+6+I6+7+8+8, I0+I6+I0 7+8+9+I7+I0
I8+I6+I9+II+9+8 2+4+I2+4+I3. 2+4 6+4+20+I2+I4+5
7+8+9+8+3+3+I4+5 2+4+I2+4+I3+I4 2+4+I3+I7+I5+I9+I+5+I0+I5+I
I6+I3+6+I7.

Каждой букве соответствует одно число, причем разным буквам соответствуют разные числа /е и ё считаются одной буквой/; зашифрованные буквы в пределах одного слова разделяются плюсами; знаки препинания в тексте сохраняются.

Задание. Расшифруйте этот текст.

Задача № 4.

В русском языке разные грамматические формы одного и того же слова могут иногда совпадать. Например, слово солдат можно понять и как стоящее в единственном числе /солдат приехал/ и как стоящее во множественном /взвод солдат/.

Задание. Приведите такую форму русского существительного или прилагательного, чтобы ее можно было понять как _____ слово, стоящее в именительном, родительном, дательном, винительном, творительном или предложном падеже, то есть, короче, чтобы можно было приписать этой форме любой падеж.

Соизмеримость и несоизмеримость.

Определения. Отрезки a и b называются соизмеримыми, если существует их общая мера, т.е. отрезок c, укладывающийся и в a, и в b целое число раз.

Натуральным числом называется одно из чисел 0, I, I+I, I+I+I,... Множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$. Целыми числами называются натуральные числа и противоположные к ним. Множество целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$. Рациональными числами называются числа, равные m/n, где $m, n \in \mathbb{Z}$. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

Задачи.

I. Отрезки a и b соизмеримы $\Leftrightarrow$ $b/a \in \mathbb{Q}$

2. Отрезки a и b соизмеримы $\Leftrightarrow$ существует их общее кратное, т.е. отрезок c, в котором они оба укладываются целое число раз.

3. Если a и b соизмеримы и b и c соизмеримы, то a и c соизмеримы.

4. По кольцевой дороге длиной I км отправляется эстафета, каждый этап которой имеет длину x км ($0 < x < I$). Доказать, что один из этапов эстафеты кончится в точке старта тогда и только тогда, когда число x рационально.

5* (Продолжение.) Если x иррационально, то существует этап эстафеты, который закончится в точке, отстоящей от точки старта менее чем на I см.

6. Доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. (Указание. Пусть m/n – несократимая дробь, $(m/n)^2 = 2$, $m^2 = 2n^2$. Докажите, что m четно. Докажите затем, что n четно и получите противоречие с несократимостью.)

7. Из теоремы Пифагора следует, что если b – диагональ квадрата, сторона которого равна a, то $b^2 = 2a^2$. Докажите, что сторона и диагональ квадрата несоизмеримы и что их отношение – иррациональное число (число, не являющееся рациональным).

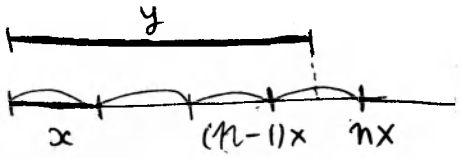
8. Если $x, y \in \mathbb{Q}$, то $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$, $x/y \in \mathbb{Q}$

9. а) Известно, что $x \notin \mathbb{Q}$, $y \notin \mathbb{Q}$. Можно ли утверждать, что $x+y \notin \mathbb{Q}$? б) Известно, что $x \notin \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$. Можно ли утверждать, что $x+y \notin \mathbb{Q}$?

I0. Прямая $y = kx$ проходит через целочисленную точку (точку вида $\langle m, n \rangle$, где $m, n \in \mathbb{Z}$), отличную от начала координат, тогда и только тогда, когда k рационально.

II* На плоскости нарисованы окружности радиуса 0,00I с центрами во всех целочисленных точках, кроме начала координат. Докажите, что любой луч, выходящий из начала координат, упирается в одну из них.

Аксиома Архимеда. Пусть x, $y > 0$. Тогда существует такое натуральное n, что $(n-1)x \le y < nx$



(Это утверждение названо аксиомой, так как оно не выводится из известных нам свойств действительных чисел.)

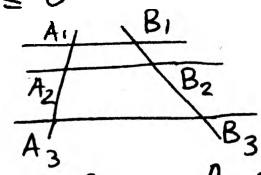
I2. Для всякого x найдется натуральное n, большее x.

I3*. Вывести аксиому Архимеда из утверждения задачи I2.

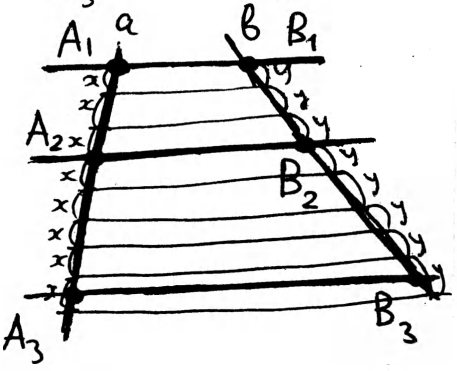
I4. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$

I5. Если $x \le \frac{1}{n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $x \le 0$

I6. Если $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$
то $A_1A_2 / A_2A_3 = B_1B_2 / B_2B_3$



Указание. Пусть n – произвольное натуральное число. Разделим отрезок A_1A_2 на n равных частей, каждая длиной x. По аксиоме Архимеда найдется такое m, что $(m-1)x \le A_2A_3 < mx$ Отметим соответствующие точки и проведем через них параллельные прямые. Они высекут на прямой b равные отрезки; обозначим их длину y Тогда $B_1B_2 = ny$, $(m-1)y \le B_2B_3 < my$, откуда $\frac{m-1}{n} \le \frac{A_2A_3}{A_1A_2} < \frac{m}{n}$ и $\frac{m-1}{n} \le \frac{B_2B_3}{B_1B_2} < \frac{m}{n}$

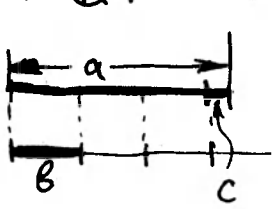


Выведите отсюда, что $|B_2B_3/B_1B_2 - A_2A_3/A_1A_2| \le \frac{1}{n}$ и, используя задачу I5, что $B_2B_3/B_1B_2 = A_2A_3/A_1A_2$

I7*. Докажите, что в любом интервале $]a, b[$ с $a < b$ есть а) рациональное число; б) иррациональное число.

I8*. Постройте взаимно однозначную функцию $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

I9*. Алгоритм Евклида. Пусть a и b – пара отрезков, причем $a > b$. Преобразование Евклида переводит эту пару в пару b, c, где c – "остаток от деления a на b", т.е. отрезок, оставшийся после вычитания из a максимально возможного числа отрезков длиной b (Это возможно по аксиоме Архимеда.) Алгоритм Евклида состоит в применении преобразования Евклида до тех пор, пока не получится пара отрезков вида $(d, 0)$. Если такая пара получается, то применение алгоритма Евклида заканчивается и результатом считается d. Докажите:



(а) Если применение алгоритма Евклида к отрезкам a и b заканчивается и дает отрезок d, то a и b соизмеримы и d – их общая мера.

(б) Если отрезки a и b соизмеримы, то применение алгоритма Евклида к ним заканчивается.

(в) Пусть X – общая мера отрезков a и b, d – результат применения к ним алгоритма Евклида. Тогда d кратно X.

(продолжение задачи I9) Из свойств (а) - (в) вытекает, что применение алгоритма Евклида к отрезкам a и b

- не заканчивается, если a и b несоизмеримы;

- дает общую меру a и b, кратную любой другой общей мере ("наибольшую общую меру"), если a и b соизмеримы.

20*. К паре отрезков a и b, длина которых не превосходит I м, применили 20 раз преобразование Евклида. Доказать, что длина получившихся отрезков не превосходит I мм.

2I*. Блоха прыгает по прямой прыжками двух видов - длины a и длины b. Доказать, что:

(а) если a и b соизмеримы, d - их наибольшая общая мера, то блоха может сдвинуться на любое расстояние, кратное d и не может сдвинуться на расстояние, не кратное d;

(б) если a и b несоизмеримы, то блоха может попасть из любой точки в любой заданный отрезок;

(в) вывести из результата (б) утверждения задач 5 и II.

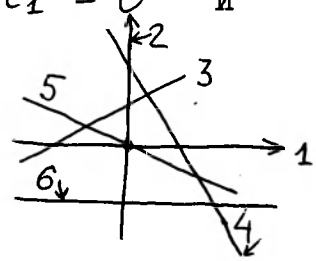
Метод координат

Метод координат позволяет перевести любое геометрическое утверждение на язык алгебры. Упражнениям в таком "переводе" и посвящено предлагаемое задание.

Напомним, что на координатной плоскости всякая точка задается своими координатами $\langle x, y \rangle$, а каждая прямая есть множество точек $\langle x, y \rangle$, для которых $ax + by + c = 0$. (Числа a и b не могут быть одновременно равны 0.) В предлагаемых задачах каждая точка задается своими координатами, а прямая – коэффициентами уравнения.

I. Как определить, (1) лежит ли точка $\langle p, q \rangle$ на прямой $ax + by + c = 0$; (2) параллельна ли прямая $ax + by + c = 0$ оси ординат; (3) задают ли уравнения $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ одну и ту же прямую или нет?

2*. Что можно сказать о знаках коэффициентов a, b и c, если прямая $ax + by + c = 0$ – одна из 6 прямых, изображенных на рисунке? (Прямые 1 и 2 – оси координат.)



3. Как найти (1) уравнение прямой, проходящей через точки $\langle x_1, y_1 \rangle$ и $\langle x_2, y_2 \rangle$; (2) точку пересечения прямых с уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$?

4*. Даны 2 точки A и B и прямая ℓ (заданные, напомним, своими координатами и коэффициентами уравнения). Как определить, лежат ли точки A и B по одну сторону от прямой ℓ или нет?

5. Как найти точку, делящую заданный отрезок AB в заданном отношении $p : q$?

6. Заданы координаты вершин треугольника. Как найти координаты точки пересечения его медиан?

7. Как определить, (1) эквивалентны ли направленные отрезки AB и CD; (2) параллельны ли отрезки AB и CD?

8*. Найдите координаты какого-нибудь направленного отрезка, параллельного прямой $ax + by + c = 0$. (Ответ. $\langle b, -a \rangle$.)

9*. Как определить, параллельны ли прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$?

10. Куда переводит гомотетия с центром $\langle a, b \rangle$ и коэффициентом k точку $\langle x, y \rangle$? (Проверьте ответ при $k = 1$ и $k = -1$.)

11. Как найти расстояние между точками $\langle x_1, y_1 \rangle$ и $\langle x_2, y_2 \rangle$?

12. Как проверить, является ли угол ABC прямым, если заданы координаты точек A, B и C? (Указание. Используйте скалярное произведение.)

13*. Доказать, что направленный отрезок с координатами $\langle a, b \rangle$ перпендикулярен прямой $ax + by + c = 0$.

14*. Как определить, перпендикулярны ли прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$?

15*. Заданы координаты точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2. Как определить, равны ли углы $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$?

16. Записать уравнение, множеством решений которого является окружность с центром $\langle a, b\rangle$ и радиусом r.

17*. Доказать, что множеством решений уравнения $x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$ является окружность, точка или пустое множество. Как определить, что именно? Как найти центр и радиус окружности (если это окружность?)

18*. Доказать, что расстояние от точки $\langle p, q\rangle$ до прямой с уравнением $ax + by + c = 0$ равно $|ap + bq + c| / \sqrt{a^2+b^2}$. (Указание. Вектор $\langle a/\sqrt{a^2+b^2},\ b/\sqrt{a^2+b^2}\rangle$ перпендикулярен к этой прямой и имеет единичную длину.)

19*. Даны координаты $\langle a_1, a_2\rangle$, $\langle b_1, b_2\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle$ точек A, B и C. Как найти площадь треугольника ABC ? (Ответ: $S = \frac{1}{2}\,|(b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (c_1 - a_1)(b_2 - a_2)|$.)

20. Найти координаты точки, в которую переходит точка $\langle p, q\rangle$ при повороте вокруг начала координат на 90° против часовой стрелки.

21*. Как найти проекцию заданной точки на заданную прямую?

22*. Доказать, что график квадратного трехчлена $y = x^2$ есть множество всех точек, равноудаленных от некоторой точки A и прямой l. Найти A и l.

23*. Даны две точки A и B и число $c > 0$. Доказать, что множество тех точек X, для которых $|AX|/|BX| = c$, – окружность.

24*. Найти такие точки A и B и число c, чтобы множество $\{X \mid ||AX| - |BX|| = c\}$ совпадало бы с гиперболой $\{\langle x, y\rangle \mid xy = 1\}$.

25*. Степенью точки относительно окружности называется квадрат длины касательной, проведенной из этой точки к этой окружности (если точка лежит вне окружности. Придумать разумное определение степени для точек внутри окружности. Доказать, что множество всех точек, имеющих равные степени относительно двух данных окружностей, есть прямая (называемая радикальной осью пары окружностей).

26*. (Продолжение.) Даны три окружности. Доказать, что 3 радикальные оси пересекаются в одной точке. Вывести отсюда, что если окружности попарно пересекаются, то их общие хорды имеют общую точку.

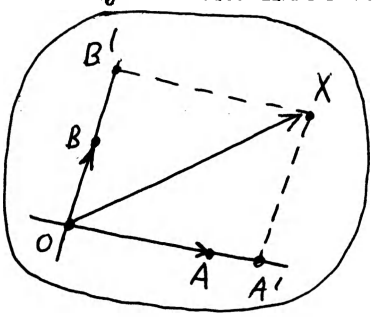
Зачетные задачи. 1. При каких условиях на координаты точек A, B, C, D четырехугольник $ABCD$ – ромб?

2. Даны координаты вершин трапеции. Как написать уравнение её средней линии?

Линейная алгебра: косоугольные координаты

Пусть на плоскости заданы 3 точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Числа $\langle a, b\rangle$ называются <u>косоугольными координатами</u> точки X относительно <u>косоугольной</u> системы координат OAB, если

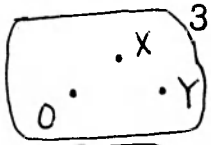
$$\overrightarrow{OX} = a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}.$$



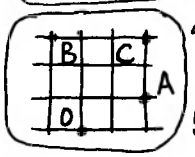
Чтобы найти координаты произвольной точки X, нужно провести через X прямые, параллельные OA и OB получив точки B' и A'. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ и осталось найти такие a и b, чтобы $\overrightarrow{OA'} = a \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = b \cdot \overrightarrow{OB}$.

I. Задана косоугольная система координат . Нарисовать множество тех точек X, у которых: (I) хотя бы одна из координат равна I; (2) первая координата больше I, а вторая – не больше I; (3) сумма координат равна I; (4) первая координата больше второй по модулю.

2. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника OAB в косоугольной системе координат OAB.



3. Была нарисована косоугольная система координат OAB, точка X с координатами $\langle 1,1\rangle$ и точка Y с координатами $\langle 1,2\rangle$. Точки A и B стерли. Восстановить их.



4. Найти координаты точки C в косоугольной системе координат OAB (Каждая клеточка рисунка – квадрат!)

5. Точка C имеет координаты $\langle 1, 2\rangle$ в косоугольной системе координат OAB. Какие координаты имеет точка B в косоугольной системе координат OAC ?

6. Направленный отрезок OZ равен сумме направленных отрезков OX и OY. Как найти координаты Z в косоугольной системе координат OAB, зная координаты X и Y ? Как найти координаты Z, если $OZ = k \cdot OX$, а координаты X и число k известны?

7. Правая картинка получена некоторым преобразованием из левой. Однако на ней отсутствуют некоторые предметы, изображенные на левой и наоборот. Перерисуйте картинки, дополнив их недостающим (рис. I).

8. Где должна находиться точка правой картинки, соответствующая точке левой картинки с координатами $\langle x, y\rangle$?

9. Решите задачи 7 и 8 для рис. 2.

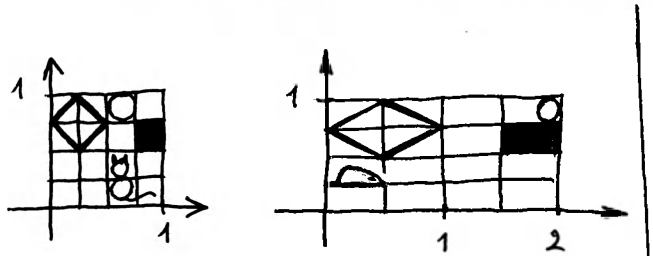


Рис. 1

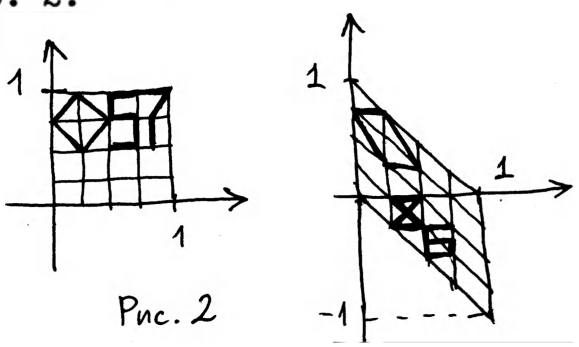
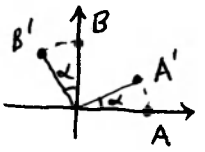


Рис. 2

Повороты и тригонометрия

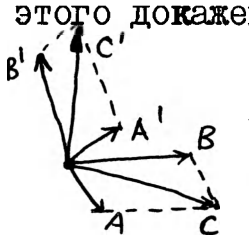
Выберем на плоскости прямоугольную систему координат. Мы будем рассматривать повороты вокруг начала координат.



I. Найти координаты точки, в которую переходит точка $A\langle 1, 0\rangle$ при повороте на угол α вокруг начала координат.

2. Тот же вопрос для точки $B\langle 0, 1\rangle$.

Мы хотим выяснить, куда переходит произвольная точка $\langle x, y\rangle$. Для этого докажем некоторые свойства поворотов.*)

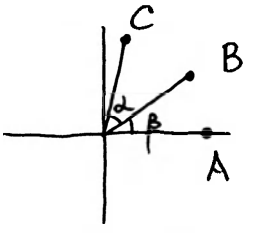


3. (Аддитивность.) Пусть $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ и точки A', B', C' получаются из A, B, C поворотом вокруг точки O. Тогда $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$.

(Указание. При повороте – как и при всяком движении – параллелограмм переходит в параллелограмм.)

4. (Однородность.) Пусть $\overrightarrow{OB} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ и точки A', B' получаются из точек A, B поворотом вокруг O. Тогда $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OA'}$

5. Доказать, что точка $\langle x, y\rangle$ при повороте на угол α переходит в точку $\langle x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha\rangle$. (Указание. Согласно задаче 3, для нахождения образа точки $\langle x, y\rangle$ достаточно найти образы точек $\langle x, 0\rangle$ и $\langle 0, y\rangle$; это делается с помощью 1,2,4.)



6. Точка B получается из точки $A\langle 1, 0\rangle$ поворотом на угол β. Пользуясь задачей 1 и предыдущей задачей, найти координаты точки C, получающейся из B поворотом на угол α, т.е. точки $R^\alpha(R^\beta(A))$

7. Пользуясь результатом предыдущей задачи и тем, что $R^\alpha(R^\beta(A)) = R^{\alpha+\beta}(A)$, выразить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$ через $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\beta$.

Замечание. Как отмечалось в "Геометрических преобразованиях", можно определить R^α при любых α (а не только при $|\alpha| \le 180$) так, что $R^\alpha \circ R^\beta = R^{\alpha+\beta}$. Определив $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ как координаты точки $R^\alpha(\langle 1, 0\rangle)$, мы видим, что выведенные в задаче 7 формулы справедливы при всех α и β.

8. Вывести "формулы приведения" для $\cos(\alpha+90°)$, $\cos(\alpha+180°)$, $\cos(\alpha+270°)$, $\sin(\alpha+90°)$, $\sin(\alpha+180°)$, $\sin(\alpha+270°)$, выражающие их через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

9.* При каких a существует такое x, что (1) $\sin x = a$ и $\cos x = 4/5$; (2) $\sin x = a$ или $\cos x = 4/5$?

10.* Известно, что числа a и b таковы, что $\cos x + \sqrt{3}\sin x = a\cos(x+b)$ при всех x. Найти a и b.

*) Преобразования, обладающие этими свойствами, называются линейными. Повороты, как и все движения, сохраняющие точку O, линейны (но не исчерпывают всех линейных преобразований.

Площади

1. В квадрате площади 10 расположены 9 фигур площади 9. Доказать, что существует точка, принадлежащая всем фигурам.

2.* Внутри фигуры площади 10 расположено 4 фигуры площади 4. Доказать, что пересечение каких-то двух из них имеет площадь 1 или более.

3.* Дерево имеет 1500 листьев. Доказать, что можно так оборвать 700 из них, чтобы тень дерева после этого была не меньше 8/15 исходной.

4.* Вдоль коридора так постелены (налегающие друг на друга) ковровые дорожки, что если убрать любую из них, оставив остальные на месте, то оголится кусок пола. Доказать, что общая длина дорожек не более чем в 2 раза превосходит длину коридора.

5.** Фигуру, вырезанную из бумаги, раскрасили 10 красками с одной стороны. Затем её перевернули на другую сторону и разделили несколькими линиями на 10 частей. Доказать, что можно так раскрасить эти 10 частей 10 красками, чтобы каждая часть была окрашена своей краской, а площадь, окрашенная с обеих сторон одинаковой краской, составляла не менее 1/10 площади всей фигуры.

6. Часть круга закрасили черным цветом, причем площадь закрашенных участков составляет более половины площади круга. Доказать, что можно найти две черные точки, расположенные симметрично относительно центра круга.

7.* Даны две окружности, длина каждой 1983 см. На одной из отмечены 1983 точки, на другой - несколько дуг, сумма (длин) которых меньше 1. Доказать, что эти окружности можно так наложить друг на друга, что ни одна отмеченная точка не попадет ни на одну отмеченную дугу.

8.* На плоскости нарисована клетчатая сетка, разбивающая её на квадраты со стороной 1. Доказать, что любую фигуру площади 1983 можно так расположить на плоскости, чтобы она покрывала не менее 1983 узлов, а можно и так расположить на плоскости, чтобы она покрывала не более 1983 узлов.

9.** (Теорема Минковского) Выпуклая фигура площади более 4 имеет центр симметрии, являющийся одним из узлов клетчатой сетки, разбивающей плоскость на единичные квадраты. Доказать, что она покрывает еще по крайней мере 2 узла сетки.

10.* Вывести из теоремы Минковского, что существует точка с целыми координатами x, y (не равными 0 одновременно), отстоящая от прямой $y=\sqrt{2}x$ не более чем на 0.0001.

II. Может ли так быть, что длины всех сторон одного треугольника меньше 1 см, длины всех сторон второго больше 100 м, а площадь первого треугольника больше площади второго?

I2. Для любого невыпуклого 4-угольника найдется выпуклый с тем же периметром и большей площадью. Доказать.

I3. Прямоугольник 10·50 разрезан на I000 треугольников. Доказать, что хотя бы одна сторона одного из них не меньше 1.

I4.* На отрезок длиной 10 см брызнули краской, причем так, что никакие две точки, отстоящие на 1 см, не закрашены одновременно. Доказать, что общая длина закрашенных участков не превосходит 6 см.

I5.* Доказать, что в круге радиуса 10 нельзя поместить 500 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя было больше 1.

I6.* Доказать, что число целочисленных решений неравенства $x^2 + y^2 \leqslant 100$ не большее 500.

I7.** Назовем прямоугольник полуцелым, если длина (по крайней мере) одной из его сторон – целое число. Доказать, что если прямоугольник можно разрезать на полуцелые прямоугольники со сторонами, параллельными сторонам исходного, то он сам полуцелый.

I8.* Внутри квадрата со стороной 1 размещен выпуклый многоугольник площади больше 0.5. Доказать, что для любой из сторон квадрата существует параллельный ей отрезок длины 0.5, целиком лежащий внутри многоугольника.

I9.* Всякий выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить в прямоугольник площади 2. Доказать.

20.* Имеется несколько точек. Любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не более 1. Доказать, что их можно поместить в прямоугольник площади 2.

2I.* Параллелограмм внутри треугольника имеет площадь, не большую половины площади треугольника. Доказать.

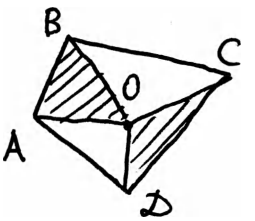
22.* Имеется набор квадратов общей площадью 4. Доказать, что ими можно покрыть квадрат площади 1.

23.* Многоугольники M и N имеют равную площадь. Доказать, что они равносоставлены, т.е. что M можно разрезать на части, из которых можно составить N.

24.* Четырехугольник со сторонами a, b, c и d имеет площадь S. Доказать, что (I) $S \leq \frac{ab+cd}{2}$ (2) $S \leq \frac{ac+bd}{2}$.

25.** Доказать, что во всяком шестиугольнике есть диагональ, отсекающая от него треугольник, площадь которого составляет не более I/6 части площади шестиугольника.

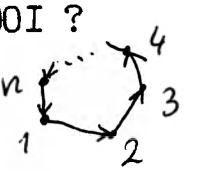
26.* Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найти множество всех точек O, для которых справедливо равенство $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OAD} + S_{OBC}$.



27.* Доказать, что центр окружности, вписанной в 4-угольник, лежит на прямой, соединяющей середины его диагоналей.

28.* Может ли треугольник с вершинами в узлах клетчатой сетки (сторона клетки - I) иметь площадь, меньшую 0.00I ?

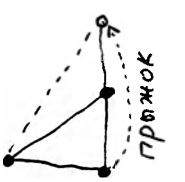
29.* Многоугольник имеет вершины с координатами $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.



Доказать, что его площадь равна

$$1/2\,(\,(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)+\ldots+(y_n+y_1)(x_n-x_1)\,)$$

30.* Три кузнечика играют в чехарду на клетчатой бумаге со стороной клетки I. Правила такие. Вначале они садятся в 3 вершины одного (любого) квадратика. Затем любой из них может совершить прыжок через любого другого, оказавшись в симметричной точке (которая также будет узлом сетки). Доказать, что кузнечики могут оказаться в вершинах треугольника ABC тогда и только тогда, когда A, B и C - узлы сетки и площадь треугольника ABC равна I/2. (Такие треугольники мы будем называть простыми.)



31.** Доказать, что треугольник с вершинами в узлах сетки является простым тогда и только тогда, когда внутри него и на его сторонах нет узлов сетки.

32.** (Формула Пика.) Доказать, что площадь S многоугольника с вершинами в узлах сетки равна $B + Г/2 - 1$ где B - число узлов сетки, лежащих внутри него, а $Г$ - число узлов, лежащих на его границе (считая вершины).

33.** Даны два разбиения единичного квадрата на 100 равновеликих частей. Доказать, что можно выбрать 100 точек так, чтобы в каждой части первого разбиения и в каждой части второго разбиения было по одной точке.

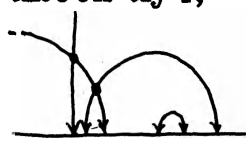
34.* Противоположные стороны шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Доказать, что площади треугольников ACE и BDF равны.

Н. 2105 Т 3 т 86 Н. 18667 2 т 86

Плоскость Лобачевского*

Мы хотим построить систему, в которой бы выполнялись все аксиомы геометрии, за исключением аксиомы о параллельных. Построив такую систему, мы убедимся, что аксиома о параллельных не следует из других. Мы не будем проводить этого построения полностью, но наметим его план.

Назовем "точкой" произвольную точку верхней полуплоскости на комплексной плоскости (не включая границу). Назовем "прямой" любой луч, проходящей в верхней полуплоскости, выходящий из точки на действительной оси перпендикулярно ей, а также любую полуокружность с центром на действительной оси, лежащую в верхней полуплоскости. (Концы лучей и полуокружностей не включаются!) Построенную систему назовем плоскостью Лобачевского.



I. Доказать, что через любые две "точки" проходит ровно одна "прямая".

2. Назовем две "прямые" параллельными, если они не имеют общих точек. Сколько прямых, параллельных данной, можно провести через данную точку, не лежащую на данной прямой?

Чтобы построить геометрию, точек и прямых мало: надо определить длины отрезков, величины углов и т.п. Мы начнем с определения движений.

3. Пусть a, b, c, d – действительные числа. Доказать, что преобразование $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю (если $ad-bc>0$) или в нижнюю (если $ad-bc<0$). Что будет, если $ad-bc=0$?

Будем называть отображения верхней полуплоскости в себя, заданные формулой $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ при $ad-bc>0$, "собственными движениями" плоскости Лобачевского. (Собственные движения обычной плоскости – движения, сохраняющие ориентацию.)

4. Доказать, что каждое "собственное движение" является взаимно однозначным отображением плоскости Лобачевского на себя и обратное отображение также является "собственным движением".

5. Доказать, что композиция двух "собственных движений" является "собственным движением".

Помимо "собственных движений" рассмотрим "несобственные движения", задаваемые формулой $z \mapsto (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d)$ при $ad-bc<0$. "Движением" будем называть "собственное движение" или "несобственное движение".

6. Доказать, что инверсия с действительным центром, сдвиг вдоль вещественной оси, симметрия относительно мнимой оси и гомотетия с действительным центром и положительным коэффициентом являются "движениями".

7. Доказать, что "движения" взаимно однозначны, композия "движений" и обратное к "движению" – "движения".

Утверждение этой задачи выражают словами: «"движения" образуют группу».

* Дополнительный листок

8. Доказать, что каждое "движение" представимо в виде композии нескольких "движений", каждое из которых является инверсией с центром O и радиусом I, гомотетией с центром O и положительным коэффициентом, сдвигом вдоль вещественной оси или симметрией относительно мнимой оси.

9. Доказать, что при "движении" "прямые" переходят в "прямые".

I0. Доказать, что (I) для любых двух точек; (2) для любых двух прямых существует "движение", переводящее одну в другую.

Теперь можно определить равенство "отрезков" и "углов": "отрезок" AB "равен" "отрезку" CD, если существует "движение", переводящее A в C и B в D; "угол" между "прямыми" l и m "равен" "углу" между "прямыми" l_1 и m_1, если существует "движение", переводящее l в l_1 и m в m_1.

II. Доказать, что "отрезок" AB "равен" "отрезку" BA.

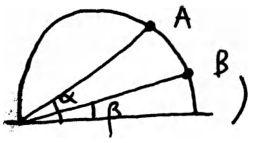
Определить равенство отрезков и углов мало: нужно уметь измерять их величину. Для "углов" это просто: величиной "угла" между двумя "прямыми" (т.е. дугами окружностей) мы можем назвать величину (обычного) угла между касательными к ним.

I2. Доказать, что два "угла" "равны" тогда и только тогда, когда их величины равны.

С расстоянием дело обстоит сложнее.

I3. Определить расстояние между двумя "точками" так, чтобы два "отрезка" AB и CD были бы "равны" тогда и только тогда, когда "расстояние" между A и B равно "расстоянию" между C и D

(Указание. Пусть A и B лежат на вертикальном луче. Как нужно определить "расстояние", чтобы оно не менялось при гомотетии? Затем определите расстояние между любыми двумя точками, пользуясь тем, что оно должно сохраняться при "движении".



Ответ: $|AB| = \log(tg\alpha / tg\beta)$)

Теперь Вы можете взять любой учебник геометрии - желательно такой, в котором аксиома параллельных вводится как можно позже - и проверить, что в нашей модели выполнены все аксиомы геометрии, кроме аксиомы параллельных, и, следовательно, все теоремы, не опирающиеся на эту аксиому. (Среди них отметим теорему: сумма углов треугольника не превосходит 180°.)

I4. Рассмотрим другую модель геометрии Лобачевского: назовем точками точки единичного круга (без границы), а прямыми - его диаметры и дуги окружностей, пересекающих единичную окружность под прямым углом. Докажите, что эта модель изоморфна построенной ранее, т.е. существует взаимно однозначное отображение верхней полуплоскости на единичный круг, при котором "прямые" (в одном смысле) переходят в "прямые" (в другом смысле) и наоборот.

Множество задач.

В этом листке собраны самые разные задачи, как простые, так и не очень простые.

1. В вершинах шестиугольника написаны числа 0,1,0,1,0,0 (по часовой стрелке). За один шаг разрешается к двум соседним числам прибавить по 1. Можно ли за несколько таких шагов сделать все числа равными?

2. В кружке 20 участников. На дом задали несколько задач. Получилось так, что каждую задачу решили 2 участника, а каждый участник решил 3 задачи. Сколько было задач?

3. Какое наименьшее число распилов необходимо, чтобы распилить куб со стороной 3 см на 27 маленьких кубиков? (Распил производится по плоскости; части разрешается перекладывать и пилить сразу несколько частей.)

4. Может ли шахматный конь попасть из левого нижнего угла доски в правый верхний, побывав на каждом поле по одному разу?

5. Прямоугольник замостили плитками размеров 2·2 и 1·4. Затем одну из плиток 2·2 потеряли, но нашли лишнюю плитку 1·4. Доказать, что замостить тот же прямоугольник не удастся.

6. Из шахматной доски вырезали два противоположных угловых квадратика. Можно ли после этого разрезать её на прямоугольники 1·2 ?

7. Сто разных фишек поставлены в ряд. Любые две фишки, стоящие через одну, можно поменять местами. Удастся ли переставить фишки в обратном порядке?

8. В 12 домах, покрашенных в белый и красный цвет, живут 12 гномов. У каждого гнома нечетное число друзей. В январе первый гном красит свой дом в тот цвет, в который покрашены дома большинства его друзей. В феврале это делает второй,..., в декабре - двенадцатый. Доказать, что через несколько лет цвета домов перестанут меняться.

9. На окружности в каком-то порядке нарисовано 20 плюсов и 20 минусов. Доказать, что число пар соседних плюсов равно числу пар соседних минусов.

10. В последовательности из нескольких различных фишек 1983 раза поменяли местами какие-то пары соседних фишек. Могла ли после этого получиться исходная последовательность?

11. На полке стоят в беспорядке тома энциклопедии. Найдя какие-то два тома, стоящие в обратном порядке (том с большим номером левее тома с меньшим номером), мы меняем их местами. Доказать, что в каком бы порядке мы это не делали, рано или поздно мы расположим тома в порядке возрастания номеров.

12. На доске написаны числа 0,0,0,1. За один шаг разрешается прибавить по 1 к любым двум из них. Можно ли, повторяя это, добиться, чтобы все числа стали равными?

13. С последовательностью из 10 нулей и 10 единиц несколько раз производится такая операция: стоящие рядом цифры 10 заменяются на 0...01 (число нулей любое). Доказать, что эта операция не может применяться бесконечно много раз подряд.

14. Во всех клетках таблицы 100·100 стоят плюсы. Разрешается одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, в которой 1983 минуса ?

I5. В таблице 5·5 стоят целые числа. Разрешается одновременно изменить знак у всех чисел одного столбца или у всех чисел одной строки. Докажите, что, повторяя это, можно добиться, чтобы сумма всех чисел в каждой строке и в каждом столбце была неотрицательной.

I6. Игра домино состоит из 28 костей, соответствующим 28 парам цифр от 0 до 6. Кости выложены в цепочку, причем друг к другу прикладываются одинаковые цифры. На одном конце цепочки цифра 5. Какая цифра на другом конце?

I7. Световое табло состоит из нескольких лампочек, каждая из которых может находиться в двух состояних (гореть или не гореть). На пульте несколько переключателей, переключение каждого из них приводит к изменению состояния группы лампочек (каждому переключателю соответствует своя группа). Вначале лампочки не горят. Доказать, что число возможных состояний табло есть степень 2. Найти его, если табло есть прямоугольник $m \times n$, а переключателей $m+n$ (соответствующих m строкам и n столбцам).

I8. Несколько окружностей разбивают плоскость на части. Нужно покрасить некоторые части белой краской, а некоторые – черной, причем так, чтобы любые соседние (имеющие общую границу) части были покрашены по-разному. Доказать, что это всегда возможно.

I9. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрасили в 2 цвета. Доказать, что найдутся две вертикальные и две горизонтальные прямые, на пересечении которых стоят 4 точки одного цвета.

20. Доказать, что число натуральных делителей натурального числа n не превосходит $2\sqrt{n}$.

2I. В метровом стержне просверлил дырки, разделившие его на p равных частей, а затем просверлили (независимо) дырки, делящие его на q равных частей. Затем его распилили на $p+q$ равных частей. Доказать, что если p и q – различные простые числа, то получатся две части без дырок (крайние), а в каждой из остальных частей будет по одной дырке.

22. Можно ли изобразить участок шара (например, Земного) на плоской карте так, чтобы расстояние между точками на шаре (измеренное по прямой – длина прямого туннеля) было бы равно расстоянию между их изображениями на карте?

23. В последовательности Фибоначчи два первых члена равны I, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих. Могут ли два соседних члена этой последовательности делиться на 57?

24. Доказать, что если сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 7, то каждое из них делится на 7.

25. В Зазеркалье I984 города. Некоторые пары городов соединены дорогами. Из каждого города можно проехать в каждый, но если мы закроем хотя бы одну из дорог, то это свойство нарушится. Доказать, что в Зазеркалье ровно I983 дороги.

26. Сеть линий метро такова, что из любой станции можно проехать в любую (возможно, с пересадками). Доказать, что можно закрыть одну из станций (запретив проезд через нее) так, чтобы из любой оставшейся станции можно было по-прежнему проехать в любую оставшуюся.

27. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $2^x + 3^y + 5^z$, где x, y, z – натуральные числа.

28. На клетчатой бумаге играют А и Б. Одним ходом можно соединить две соседние вершины (находящиеся на расстоянии I). Начинает А, дальше игроки ходят по очереди. Доказать, что Б может помешать А образовать из своих линий замкнутый многоугольник.

29. Двое играют в крестики-нолики по таким правилам: первый ставит два крестика, второй – нолик, затем первый – два крестика, второй – нолик и т. д. Первый выигрывает, когда на одной горизонтали или одной вертикали стоит рядом 1984 крестика. Доказать, что первый может всегда добиться победы.

30. Из каждой вершины треугольника проведен отрезок, соединяющий её с некоторой точкой, лежащей внутри противоположной стороны. Доказать, что середины этих отрезков не могут лежать на одной прямой.

31. На кольцевом шоссе есть несколько бензоколонок, в каждой из них какой-то запас бензина. Всего бензина достаточно, чтобы объехать по шоссе кругом. Доказать, что есть такая бензоколонка, отправляясь от которой машина с первоначально пустым баком может объехать шоссе по кругу, заправляясь по пути.

32. В клетках бесконечной клетчатой доски расположены натуральные числа, причем каждое из них равно среднему арифметическому четырех соседних (справа, слева, вверху и внизу). Доказать, что все числа равны.

33. Какое максимальное количество натуральных чисел от I до 50 можно выбрать, чтобы среди них не было отличающихся ровно в 2 раза?

34. Некоторые поля шахматной доски заминированы, причем так, что ни с какого поля левого края доски король не может добраться до правого края доски, минуя заминированные поля. Доказать, что ладья может пройти из некоторого поля верхнего края доски до нижнего края, двигаясь только по заминированным полям.

35. В шеренгу выстроено 20 восьмиклассников, за каждым из них стоит семиклассник, меньший его по росту. Доказать, что если перестроить восьмиклассников и семиклассников по росту, то по-прежнему каждый восьмиклассник будет выше стоящего за ним семиклассника.

36. Триста человек построены в 30 шеренг и I0 рядов. Из каждой шеренги выбрали самого высокого, а из этих 30 – самого низкого. Потом из каждого ряда выбрали самого низкого, а из низких – самого высокого. Кто окажется выше: самый высокий из низких или самый низкий из высоких?

37. 20 школьников получили на дом список из 20 задач. Каждый школьник решил 2 задачи, и каждую задачу решили 2 школьника. Доказать, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал по одной задаче (из решенных им) и все задачи были бы рассказаны.

38. В школе работает некоторое количество кружков. Администрация хочет назначить в каждом кружке старосту так, чтобы ни один человек не был старостой двух кружков сразу. Доказать, что это невозможно сделать в том и только том случае, если имеется k кружков, для которых количество школьников, ходящих хотя бы в один из них, меньше k.

39. Доказать утверждение задачи 37, если каждый школьник решил I0 задач и каждую задачу решили I0 школьников.

40. Комиссия собиралась 40 раз, каждый раз присутствовало I0 человек и никакие двое из членов комиссии не встречались на заседаниях более одного раза. Доказать, что число членов комиссии больше 60.

Комбинаторика, ч. I. (Подготовительные задачи. Принцип Дирихле.)

Подготовительные задачи.

I. Сколько диагоналей в 1983-угольнике?

2. Каждая из 10 команд сыграла с каждой по одному разу. Сколько всего было игр?

3. Сколько существует чисел от 1 до 1000, которые делятся на 2 или делятся на 3, но не делятся на 6?

4. Сколько существует двузначных чисел, первая цифра которых содержится среди цифр $\{1, 2, 3, 6\}$, а вторая - среди цифр $\{2, 3, 5, 7, 9\}$?

5. Экзаменационный билет содержит вопрос по алгебре, по геометрии и задачу. Вопросов по алгебре - 20, по геометрии - 30, задач - 100. Сколько различных билетов можно составить?

6. Автомобильный номер содержит 3 буквы и 4 цифры. Учитывая, что букв в русском алфавите 33, и разные машины должны иметь разные номера, оценить максимально возможное число автомобилей.

7. Известно, что в множестве A имеется a элементов, в множестве B - b элементов, а в $A \cap B$ - c элементов. Сколько элементов в множествах: (1) $A \cup B$ (2) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?

8. Сколькими способами можно разменять 15 коп. монетами по 1 и 2 коп.? Монетами по 1, 2, 5 коп.?

Следующее (очевидное) утверждение весьма важно.

Основной принцип комбинаторики. Пусть A и B - два конечных множества, $f : A \to B$ - взаимно однозначная функция. Тогда число элементов в множестве A (обозначается $|A|$) равно числу элементов в множестве B : $|A| = |B|$.

Напомним, что для установления взаимно однозначного соответствия между A и B необходимо: (1) определить функцию $f : A \to B$, т.е. объяснить, чему равно значение $f(x)$ для любого $x \in A$; (2) доказать, что f - вложение, т.е. что если $x, y \in A$, $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$; (3) доказать, что f - наложение, т.е. что для любого $x \in B$ найдется такой $y \in A$, что $f(y) = x$.

Этот принцип полезен при решении предлагаемых ниже задач.

9. Доказать, что число 3-элементных подмножеств 1983-элементного множества равно числу 1980-элементных подмножеств того же множества. (Впоследствии мы найдем это число.)

I0. Каких подмножеств больше у множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ - содержащих элемент 1 или не содержащих элемент 1 ?

II.* Разобьем все подмножества данного конечного множества A на 2 класса - в класс $Ч$ включим множества с четным числом элементов, в класс $Н$ включим множества с нечетным числом элементов. Доказать, что $Ч$ и $Н$ содержат одинаковое число элементов.

I2.* На окружности нарисованы 1983 белые точки и одна черная точка. Чего больше: треугольников с белыми вершинами или 4-угольников с 3 белыми и 1 черной вершиной?

I3.* (Продолжение.) Чего больше - многоугольников, все вершины которых белые, или многоугольников, у которых одна вершина черная, а остальные белые?

Принцип Дирихле.

Основной принцип комбинаторики можно переформулировать так: если $|A| \neq |B|$, то не существует взаимно однозначной функции $f : A \to B$. Следующий принцип конкретизирует это утверждение.

Принцип Дирихле. Если $f : A \to B$ и $|A| > |B|$, то f не является вложением: существуют такие $a_1 \in A$ и $a_2 \in A$, что $a_1 \neq a_2$ и $f(a_1) = f(a_2)$.

1. У человека на голове не более 150000 волос. Доказать, что в Москве (население больше 7 млн.) есть два человека с одинаковым числом волос.

2. (Продолжение.) Доказать, что есть 40 человек с одинаковым числом волос.

3.* Футбольный турнир проводится так, что каждая команда играет с каждой по одному разу. Доказать, что в любой момент турнира найдутся команды, сыгравшие равное число матчей.

4.* В клетках шахматной доски 100 на 100 написаны целые числа, причем в соседних (имеющих общую сторону) клетках числа отличаются не более чем на 20. Доказать, что на доске имеются 3 одинаковых числа.

5.* 65 конфет разделили между 12 школьниками. Доказать, что по крайней мере 2 из них получили конфет поровну (возможно, 0).

6.* Код марсианского языка сопоставляет с каждой из 40 букв марсианского алфавита последовательность из точек и тире. Доказать, что хотя бы одна буква закодирована последовательностью из 5 или более значков.

7.* Имеется 20 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что нельзя, отложив в сторону некоторые из гирь (возможно, ни одной), разделить оставшиеся на 2 кучи равного веса. Доказать, что общий вес гирь превосходит I тонну.

8.* Доказать, что существует число вида III...III000...000, делящееся на I983. Доказать, что существует число вида III...II, делящееся на I983.

9.* Доказать, что из $n+1$ числа, меньшего $2n$, всегда можно выбрать 2, одно из которых делится на другое. (Указание. Можно требовать, чтобы частное было степенью числа 2.)

I0.* В ряд выписаны 2^n натуральных чисел. Известно, что если выписать все простые множители всех этих чисел, то среди них будет не более n различных. Доказать, что можно выбрать несколько стоящих подряд чисел так, чтобы их произведение было точным квадратом.

II.**Последовательность состоит из $mn+1$ действительного числа. Доказать, что можно зачеркнуть некоторые члены так, что останется либо возрастающая последовательность из $m+1$ числа, либо убывающая последовательность из $n+1$ числа.

I2. Двое играют в такую игру. Первый задумывает число от I до I000. Второй отгадывает это число, задавая любые вопросы, требующие ответа "да" или "нет". Придумать способ, гарантирующий отгадывание задуманного числа за I0 вопросов. Доказать, что не существует способа, гарантирующего отгадывание задуманного числа за 9 вопросов.

Комбинаторика, ч. 2 (Основные формулы. Подсчеты.)

Размещения с повторениями.

I. Докажите, что следующие множества:
(I) всех пятизначных чисел, составленных из цифр I, 2;
(2) всех подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
(3) всех функций из $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ в $\{1, 2\}$;
(4) всех способов освещения коммунальной кухни, где у каждой из 5 соседок – своя лампочка;
(5) всех делителей числа $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$;
(6) всех слагаемых, получающихся при раскрытии скобок в выражении $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)(i+j)$;
– имеют одинаковое число элементов. Найдите это число.

2. Докажите, что

если имеется набор из n различных символов, то можно составить n^k последовательностей длины k из этих символов

3. Сколько подмножеств имеет n-элементное множество?

4. Сколько существует функций $f : A \to B$, если $|A| = m$, $|B| = n$ (Напомним: $|X|$ – число элементов в X.)

Перестановки.

5. Сколькими способами можно построить группу из 7 человек в колонну по одному?

6. Докажите, что

существует ровно $n!$ последовательностей из чисел $1, 2, \ldots, n$

(Через $n!$ обозначают произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$; считают, что $0! = 1$.)

7. Сколько существует функций $f : A \to B$, являющихся взаимно однозначными, если $|A| = m$, $|B| = n$?

8. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

Размещения без повторений.

9. Сколько существует 4-значных чисел без повторяющихся цифр (таковы, например, 0123 и 9801)?

10. Пусть имеется m символов. Число последовательностей из них длины n, все элементы которых различны, обозначают A_m^n.

Доказать, что $\boxed{A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \text{ при } m \geq n \text{ и } A_m^n = 0 \text{ при } m < n.}$

I1. Сколько существует вложений $f : A \to B$, если $|A| = p$, $|B| = q$?

I2. Рояль имеет 88 клавиш. Сколько бывает последовательностей из 6 нот? из 6 нот, в которых ни одна нота не встречается дважды?

Сочетания

I3. Сколько существует четырехзначных чисел $a_1 a_2 a_3 a_4$, у которых $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$? (Указание. Из каждого такого числа можно получить 4! = 24 числа без повторяющихся цифр.)

I4. Число n -элементных подмножеств m-элементного множества обозначается C_m^n . Доказать, что

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{1}{n!} A_m^n$$

(В иностранной литературе пишут $\binom{m}{n}$ вместо C_m^n .)

Следующие две задачи можно решать либо используя исходное определение для C_m^n , либо доказанную формулу.

I5.* Доказать, что $C_m^n = C_m^{m-n}$.

I6.* Доказать, что $C_{m+1}^{n+1} = C_m^n + C_m^{n+1}$.

I7.* Доказать, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

I8. Сколько существует последовательностей из p нулей и q единиц?

I9. Сколько решений в натуральных числах (включая 0) имеет система неравенств и уравнений

$$0 \leq x_1 \leq 1, \ldots, \quad 0 \leq x_{10} \leq 1, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 4$$

Подсчеты.

I. Сколько существует 4-значных чисел, не все цифры которых различны?

2. Среди 7 человек есть Петров и Сидоров. Сколькими способами можно построить этих 7 человек в колонну, если нужно, чтобы Петров был впереди Сидорова?

3. (Продолжение.) ...Петров и Сидоров были рядом (в любом порядке)?

4. Сколько существует шестизначных чисел, не содержащих цифр 0 и 8 ?

5.* Сколько существует шестизначных чисел, содержащих 0 и не содержащих 8 ?

6. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$?

7.* Найти сумму всех пятизначных чисел, составленных из различных нечетных цифр (таковы, например, 13579 и 91537).

8. Сколько делителей имеет число $2^{10}\cdot 3^{15}\cdot 5^{20}$?

9.* Сколько существует различных 6-гранных игральных костей? (Две кости считаются различными, если их нельзя перепутать, как ни переворачивай их.)

10.* В каждую клетку таблицы 10 на 10 требуется вписать 1 или -1 так, чтобы произведения всех чисел в каждом столбце и в каждой строке равнялись 1. Сколькими способами можно заполнить таблицу?

11.* Сколько существует 5-значных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в которых цифра 3 идет сразу после цифры 2?

12.* (Продолжение) ...в которых цифра 3 идет после цифры 5, но до цифры 1?

13.* (Продолжение.) ...в которых цифра 5 не стоит на 5 месте?

14.** (Продолжение.) ...в которых ни одна цифра не стоит на своём месте (т.е. не равна своему порядковому номеру)?

15.* Сколько существует подмножеств множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, содержащих (1) ровно 2 четных числа; (2) не менее двух четных чисел?

16.* Сколькими способами можно рассадить n человек за круглым столом (способы рассадки, отличающиеся поворотом, считаем одинаковыми)?

17.* Сколько существует 10-значных чисел, в которые цифры 1,2,3,...,7,8 входят по разу, а цифра 9 - дважды?

18.* Имеется 9 различных ящиков, 5 одинаковых белых шаров и 5 одинаковых черных шаров. Сколькими способами можно разместить шары в ящиках так, чтобы не было пустых ящиков?

19.* Доказать, что число последовательностей из n нулей и единиц, не содержащих двух нулей подряд, равно $n+1$-му числу Фибоначчи a_{n+1}. (Последовательность Фибоначчи определяется так: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, каждый следующий член равен сумме двух предыдущих.)

20.* Пусть $|A| = m$, $|B| = n$, $S_{m,n}$ - число функций $f: A \to B$, являющихся наложениями. Доказать, что $S_{m,n}$ делится на $n!$.

Комбинаторика, ч. 3 (Треугольник Паскаля. Бином Ньютона.)

Треугольник Паскаля.

Напомним: C_m^n есть число n-элементных подмножеств m-элементного множества.

1. Доказать, что $C_m^n = C_m^{m-n}$.
2. Доказать, что $C_{m+1}^{n+1} = C_m^n + C_m^{n+1}$.
3. Доказать, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

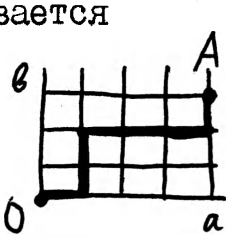
C_0^0

$C_1^0 \quad C_1^1$

$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$

. . . . . .

4. Вычислите числовые значения и заполните треугольник вплоть до 6-ой строки. (При правильном подходе вычисления должны занять не более одной минуты.) Эта таблица называется треугольником Паскаля.



5. Город состоит из прямоугольных кварталов, разделенных улицами. Сколько существует кратчайших путей из точки O в (a, b)-ый перекресток A ?

6. Используя результат предыдущей задачи, дайте новое доказательство формулы $C_{m+1}^{n+1} = C_m^n + C_m^{n+1}$.

7. Доказать, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots \pm C_n^n = 0$.

8. Пусть $T(m,n)$ определено при $m, n \in \mathbb{N}$, $0 \le n \le m$ причем выполнены свойства $T(m,0) = T(m,m) = 1$ и $T(m+1,n+1) = T(m,n+1) + T(m,n)$. Доказать, что $T(m,n) = C_m^n$

9. Пользуясь предыдущей задачей, дать новое доказательство формулы $C_m^n = m!/(n!\,(m-n)!)$

10.* Сколькими способами можно представить число 100 в виде суммы 3 натуральных слагаемых (порядок существен: 50 + 25 + + 25 и 25 + 50 + 25 - разные представления)? (Указание. Представьте себе 100 белых камушков, положенных в ряд. Сколькими способами можно положить среди них 2 черных камушка? Представьте себе 102 белых камушка, из которых 2 покрашены черной краской.)

11.* Доказать, что число решений в натуральных числах уравнения $x_1 + \ldots + x_k = l$ равно C_{k+l-1}^{k-1} (напоминаем: 0 мы считаем натуральным числом!).

12.* Необходимо купить 15 пирожных 5 сортов. Сколькими способами это можно сделать?

13.* Найти число решений в натуральных числах неравенства $x_1 + \ldots + x_k \le l$.

14.* Для проведения субботника 40 учеников класса нужно разбить на 3 группы: 15 чел. в кабинет № 15, 17 - в № 34 и 8 для натирания пола в учительской. Сколькими способами это можно сделать?

I5.* (Продолжение.) Тот же вопрос, если в каждой группе нужно назначить ответственного.

I6.* Найти коэффициент при $x^{15}y^{17}z^{8}$ в $(x+y+z)^{40}$.

I7.* 700 родичей Пиро (см. А.Франс, Остров пингвинов, кн. 6, гл. 3) на 41-ый день решили избрать из своего числа комиссию по борьбе за оправдание Пиро. При этом (для однозначности голосования) в комиссии должно быть нечетное число членов. Сколькими способами это можно сделать?

I8.* Сколько разных слов можно получить, переставляя буквы в слове "математика"?

I9.** Троллейбусный билет иногда называют "счастливым", если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех. Сколько счастливых билетов в одной серии (от 000000 до 999999) ?

Бином Ньютона

I. Докажите формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n b^n$$

Запишите её частные случаи, соответствующие $n = 2, 3, 4$.

2. Дайте новое доказательство равенства

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

3. Дайте новое доказательство равенства

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots \pm C_n^n = 0.$$

4. Найти сумму $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n$

5. Написать формулу для $(a-b)^n$, аналогичную формуле бинома Ньютона.

6. При каких n и k выполнено неравенство $C_n^k < C_n^{k+1}$?

7.* Доказать, что если p простое и $k \neq 1, k \neq p$ то C_p^k делится на p.

8.* Доказать, что $(a+b)^p$ дает при делении на p тот же остаток, что и $a^p + b^p$.

9.* Доказать, что $C_{n+m}^k = C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k \cdot C_m^0$.

I0.* Доказать, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

II.* Доказать, что $C_n^m + C_{n-1}^{m-1} + \ldots + C_{n-k}^{m-k} + \ldots + C_{n-m}^0 = C_{n+1}^m$

I2.* Доказать, что $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = a_n$

где a_n – n-ое число Фибоначчи (см. ч. 2, "Подсчеты", № I9).

I3.* (Аналог формулы бинома для многих слагаемых) Доказать, что в разложение $(a_1 + \ldots + a_k)^n$ член $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k}$ с $m_1 + \ldots + m_k = n$ входит с коэффициентом $n!/(m_1!\, m_2! \ldots m_k!)$.

I4.* Доказать, что произведение любых n подряд идущих натуральных чисел делится на $n!$.

Комбинаторика, ч. 4 (Разные задачи.)

I.* Рассмотрим все расстановки произвольного количества слонов на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга. Доказать, что число таких расстановок есть точный квадрат.

2.* В марсианском языке 2 буквы и любые 2 слова одинаковой длины отличаются по крайней мере в 3 местах. Доказать, что количество слов длины n в марсианском языке не превосходит $2^n/(n+1)$.

3.* Каково наибольшее число частей, на которое могут разбить плоскость n прямых?

4.** В $2n$ -элементном множестве выбрано несколько подмножеств, причем так, что ни одно из выбранных подмножеств не вложено в другое. Доказать, что общее число выбранных множеств не превосходит C_{2n}^n

5.* Найти сумму $0\cdot C_n^0 + 1C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$.

6.* Найти сумму $C_n^0 + (1/2)C_n^1 + (1/3)C_n^2 + \ldots + (1/n+1)C_n^n$.

7.* Найти суммы $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$, $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots$.

8.* В этой задаче мы рассматриваем представления натуральных чисел в виде суммы натуральных слагаемых, не обращая внимания на порядок слагаемых. (Напомним, что мы считаем 0 натуральным числом.) Доказать, что количество представлений числа $n \geq 1$ в виде суммы $m \geq 1$ слагаемых равно количеству представлений числа n в виде суммы слагаемых, каждое из которых принимает значения от I до m.

9.** Доказать, что число способов уплаты n копеек монетами в I, 2 и 3 коп. равно ближайшему целому числу к $(n+3)^2/12$

I0.** Сколькими способами можно разложить I000000 на 3 множителя, если считать разложения, отличающиеся порядком слагаемых, (I) одинаковыми; (2) разными ?

II.** (Расположение четных и нечетных чисел в треугольнике Паскаля.) Доказать, что: (I) n -ая строка целиком состоит из нечетных чисел тогда и только тогда, когда $n+1$ есть степень 2: (2) все внутренние числа n-ой строки четны тогда и только тогда, когда n есть степень 2; (3) количество нечетных чисел в любой строке есть степень 2. (n -ой строкой называется строка $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$.)

I2.* Функция Эйлера φ определяется так: для любого натурального n значение $\varphi(n)$ равно количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . Найти $\varphi(p)$, $\varphi(p^2)$, $\varphi(pq)$, если p и q - простые числа.

13.** (Продолжение.) Доказать, что если $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$, где $p_1, \dots, p_m$ – различные простые числа, то

$$\varphi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)\dots(1 - 1/p_m).$$

14.* На окружности выбрано 20 точек. Сколькими различными способами можно попарно соединить эти точки хордами, не пересекающимися внутри окружности?

15.** (Продолжение.) Тот же вопрос, если дано $2n$ точек и n хорд.

16.** Сколько существует последовательностей из n нулей и n единиц, у которых любой начальный отрезок содержит не меньше единиц, чем нулей?

17.** Круг разделен на p равных секторов (p – простое). Имеется n красок. Сколькими способами можно раскрасить круг, если каждый сектор можно выкрасить в любой цвет и раскраски, отличающиеся поворотом круга, считаются одинаковыми?

18.** (Продолжение.) Доказать, что $n^p - n$ делится на p.

19.** Дайте другое доказательство утверждения предыдущей задачи, используя задачу 8 из Бинома Ньютона (Комбинаторика, ч. 3).

20.** Доказать, что число наложений m-элементного множества на n-элементное (при $m \geq n$) равно $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m C_n^k$

21.** Доказать, что число последовательностей из чисел $1, 2, \dots, n$, в котором ни одно число не стоит на своем месте (т.е. i-ый член не равен i ни при каком i), равно

$$n!\left(1/2! - 1/3! + 1/4! - \dots \pm 1/n!\right)$$

(Как мы увидим, это близко к $n!/e$, где $e \approx 2.71828\dots$)

Комплексные числа, ч. I (Структура поля.)

I. Немного мистики.

Как известно, не существует такого действительного числа i, что $i^2 = -1$. Однако забудем на минуту об этом и постараемся сложить и перемножить по обычным правилам числа $2+3i$ и $7+2i$:

$$(2+3i) + (7+2i) = (2+7) + (3+2)i = 9+5i;$$

$$(2+3i)\cdot(7+2i) = 14 + 4i + 21i + 6i^2 = (14-6) + (4+21)i = 8+25i.$$

I. Сложить и перемножить $(2+3i)$ и $(7-i)$.

2. Найти $(-i)^2$, $(-i)^{10}$.

3*. Найти $(1+i)^{1001}$

4. Доказать тождество $a^2+b^2 = (a+bi)(a-bi)$

5*. Найти x, для которого $x\cdot(1+i) = 1$.

6*. Найти x, для которого $x^2+2x+2 = 0$.

7*. Найти x, для которого $x^2 = i$.

2. Точные определения.

Комплексным числом называется пара $\langle a, b\rangle$, где a, b – любые действительные числа. Комплексные числа $\langle a, b\rangle$ и $\langle a', b'\rangle$ равны, если $a = a'$, $b = b'$. Иногда вместо $\langle a, b\rangle$ пишут $a + bi$; мы не придаем (пока) знакам $+$ и i никакого смысла. Комплексное число $\langle a, b\rangle$ можно изобразить точкой на координатной плоскости с координатами a и b. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$ (complex – комплексное).

I. Изобразить числа $2+3i$, $7-i$, $1+i$.

Суммой чисел $\langle a, b\rangle$ и $\langle a', b'\rangle$ называется число $\langle a+a', b+b'\rangle$. (Как для векторов.) Очевидно, выполнены аксиомы коммутативности ($x+y = y+x$) и ассоциативности ($(x+y)+z = x+(y+z)$)

2. Какое комплексное число нужно назвать нулем (0), чтобы для любого комплексного z выполнялась аксиома $z+0 = z$?

3. Как определить операцию взятия противоположного ($z \mapsto -z$), чтобы для любого комплексного z выполнялась аксиома $z+(-z) = 0$?

Решив задачи 2 и 3, мы определили на $\mathbb{C}$ операции, удовлетворяющие всем аксиомам сложения – и, следовательно, всем их следствиям. Так что теперь можно складывать и вычитать комплексные числа так же свободно, как и действительные. (Напомним, в частности, что $z - w$ есть по определению $z + (-w)$.)

4. Точки, соответствующие комплексным числам z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами параллелограмма. Выразить z_4 через z_1, z_2, z_3.

Произведением комплексных чисел $\langle a, b\rangle$ и $\langle a', b'\rangle$ называется число $\langle aa' - bb', ab' + a'b\rangle$

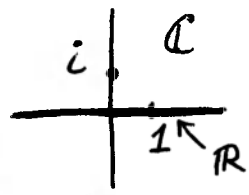
5. Найти $\langle 2, 3\rangle \cdot \langle 7, -1\rangle$, $\langle 0, 1\rangle \cdot \langle 0, 1\rangle$.

6. Доказать справедливость аксиом коммутативности ($xy = yx$), ассоциативности ($x \cdot (yz) = (xy)z$) и дистрибутивности ($x(y+z) = xy + xz$) умножения.

7. Какое число следует назвать единицей (I) , чтобы выполнялась аксиома $z \cdot 1 = z$?

О том, как определять $1/z$, мы скажем дальше.

Умножая и складывая комплексные числа, вторая компонента которых равна 0, мы видим ($\langle a,0\rangle + \langle b,0\rangle = \langle a+b,0\rangle$, $\langle a,0\rangle \cdot \langle b,0\rangle = \langle ab,0\rangle$), что они ведут себя так же, как действительные числа – их первые компоненты. Поэтому отождествляют действительное число a с комплексным числом $\langle a,0\rangle$. Так "действительная прямая" становится частью "комплексной плоскости". Обозначим число $\langle 0,1\rangle$ через i .



8. Доказать, что $i^2 = -1$

9. Доказать, что $\langle a,b\rangle = a + bi$ (Полная запись: $\langle a,b\rangle = \langle a,0\rangle + \langle b,0\rangle \cdot \langle 0,1\rangle$.)

3. Действительная и мнимая части. Сопряжение. Модуль. Действительной и мнимой частями комплексного числа $\langle a,b\rangle$ называются (действительные) числа a и b . Обозначения: $a = Re(z)$, $b = Im(z)$ (real – действительный, imaginary – мнимый). Число $\overline{z} = \langle a,-b\rangle$ называется сопряженным к числу $z = \langle a,b\rangle$. Модулем $|z|$ числа $z = \langle a,b\rangle$ называется расстояние от начала координат до изображающей число z точки комплексной плоскости: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

1. Нарисовать множество $\{z \mid Re\, z + Im\, z = 1\}$.
2. Нарисовать множество $\{z \mid Im((1+i)z) = 1\}$.
3.* Нарисовать множество $\{z^2 \mid Im\, z = 1\}$
4. Нарисовать множества $\{z \mid z = \overline{z}\}$, $\{z \mid z = -\overline{z}\}$, $\{z \mid z = i\overline{z}\}$
5. Нарисовать множество $\{z \mid 1 \le |z| < 2\}$.
6. Нарисовать множество $\{z \mid |z + (1+i)| \le 1\}$
7. Нарисовать множество $\{z \mid |z+i| = |z+2|\}$
8. Доказать, что $\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{(zw)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{\overline{z}} = z$ для любых $z, w \in \mathbb{C}$.
9. Доказать, что числа $z \cdot \overline{z}$ и $z + \overline{z}$ действительны (то есть их мнимая часть равна 0).
10.* Известно, что числа zw и $z+w$ действительны. Доказать, что либо z и w оба действительны, либо $z = \overline{w}$.

II. Доказать, что $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$ (Внимание: слева стоит действительное число, а справа – комплексное. Более точно следовало бы написать $\langle |z|^2, 0\rangle = z\cdot\overline{z}$.)

I2. Доказать, что $|z+w| \le |z|+|w|$ для любых $z, w \in \mathbb{C}$.

I3. Когда неравенство предыдущей задачи превращается в равенство?

I4. Доказать, что модуль произведения равен произведению модулей: $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$ для всех $z, w \in \mathbb{C}$.

I5*. Доказать, что если $z\cdot w = 0$, то $z = 0$ или $w = 0$.

4. Деление

I. Найти такое z , что $z(1+i) = 1$ (Указание. Вычислите $(1+i)(1-i)$.)

2. Доказать, что для всякого $z \neq 0$ найдется такое w , что $zw = 1$ (Указание. Число $z\cdot\overline{z}$ действительно.)

Решив задачу 2, мы получаем возможность ввести операцию взятия обратного $z \mapsto 1/z$, определенную при всех $z \neq 0$, так, чтобы выполнялась аксиома $z\cdot(1/z) = 1$ для всех $z \neq 0$.

Как мы видим, для комплексных чисел выполнены все аксиомы сложения и умножения (см. "Действительные числа") и, следовательно, все их следствия. (Аксиомы $z\cdot 0 = 0$ и $1+\ldots+1 \neq 0$ очевидно верны.)

3. Доказать, что если $z\cdot w = 0$, то $z = 0$ или $w = 0$.

4. Вычислить $1/i$, $1/(-2i)$, $1/(1+i)$, $1/(4-7i)$. Напомним, что a/b есть по определению $a\cdot(1/b)$

5. Вычислить $(1+i)/(1-i)$, $(3+4i)/(1+i)$, $(5+i)/(1-5i)$.

6. Доказать, что $\overline{(z/w)} = \overline{z}/\overline{w}$.

5. Квадратные уравнения.

I. Найти все комплексные z , для которых $z^2 = 1$. (Очевидно, I и –I таковы; есть ли другие?) (Указание: $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$)

2. Найти все комплексные z , для которых $z^2 = -1$.

3. Найти все комплексные z , для которых $z^2 = a$. (Число a – произвольное действительное число.)

4. Числа a , b , c – произвольные действительные. При каких z выполнено равенство $az^2 + bz + c = 0$?

5*. Доказать, что для любого комплексного C уравнение $z^2 = C$ имеет ровно 2 решения.

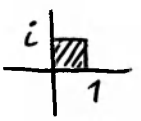
6*. Решить уравнения $z^2 = i$, $z^2 = (1+i)$.

7*. Доказать, что при любых комплексных a, b, c при $a \neq 0$ уравнение $az^2+bz+c=0$ имеет I или 2 решения в зависимости от того, равен ли дискриминант $\mathcal{D}=b^2-4ac$ нулю.

8. Разложить на множители многочлены z^2+1 и z^2-2z+2. (Многочлены - множители могут иметь комплексные коэффициенты.)

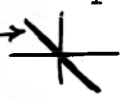
6. Комплексные числа и преобразования плоскости.

Функции $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ можно рассматривать как преобразования комплексной плоскости.

I. Найти образ и прообраз множества 

при преобразовании $f: z \mapsto z+(2+i)$

2. Какие преобразования (повороты, симметрии, гомотетии и т.д.) задают формулы: (I) $z \mapsto \bar{z}$; (2) $z \mapsto -z$; (3) $z \mapsto iz$; (4) $z \mapsto 2z$; (5) $z \mapsto i\bar{z}$?

3*. Написать формулы, задающие: (I) центральную симметрию с центром $(1+2i)$; (2) осевую симметрию с осью  (3) гомотетию с центром $1-i$ и коэффициентом 2.

4*. Найти образ прямой $\mathrm{Re}\, z=1$ при функции $z \mapsto z^2$.

5*. Доказать, что точки z и $1/\bar{z}$ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и произведение их модулей равно I. (Указание. $1/\bar{z} = z/(z\bar{z})$) Преобразование $z \mapsto 1/\bar{z}$ называется инверсией с центром 0 и радиусом I.

6*. Найти образ прямой $\mathrm{Re}\, z=1$ при функции $z \mapsto 1/z$ (Указание. Это - окружность.)

7**. Доказать, что образом прямой или окружности при функции $z \mapsto 1/z$ является прямая или окружность. (При этом прямая может перейти в окружность и наоборот!)

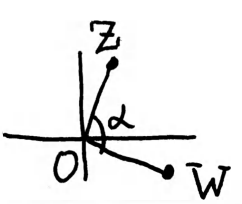
8**. Доказать аналогичное утверждение для функции $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$.

9. Доказать, что если C - комплексное число, равное по модулю I, то $z \mapsto Cz$ есть движение (т.е. не меняет расстояний.) Мы увидим впоследствии, что это движение - поворот.

7. Разное.

I*. Изобразим комплексные числа z и w точками Z и W плоскости. Доказать, что

$$\mathrm{Re}(z\bar{w}) = |OZ| \cdot |OW| \cdot \cos\alpha$$



2*. Доказать, что если z - комплексный корень уравнения $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ с действительными коэффициентами a_i, то $\bar{z}$ - также его корень.

3.* Доказать, что если уравнение $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ с действительными коэффициентами a_i имеет ровно 1983 корня, то оно имеет действительный корень.

4.* Найти все "автоморфизмы $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$", т.е. все функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для которых $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{C}$ и $f(t) = t$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Назовем <u>целым комплексным</u> числом число вида $a+bi$, где a, b – целые (в обычном смысле) числа. Очевидно, сумма и произведение целых комплексных чисел – целое (комплексное) число. Множество всех целых комплексных чисел обозначается $\mathbb{Z}[i]$.

5.* Пусть $a, b \in \mathbb{Z}[i]$. Говорят, что a делится на b, если существует $c \in \mathbb{Z}[i]$, для которого $a = bc$. Найти все делители числа I. (Указание. Их четыре: ± 1 и $\pm i$. Чтобы доказать, что других нет, используйте формулу $|zw| = |z| \cdot |w|$.)

6.* Найдите все делители чисел 2 и 3.

7.* Число $a \in \mathbb{Z}[i]$ называется простым (в $\mathbb{Z}[i]$), если оно не имеет разложений $a = bc$, кроме тех, в которых b или c является делителем I. Будут ли числа 2, 3, 5, $1+i$ простыми?

8.* Разложить числа из предыдущей задачи на простые множители.

9.** Сформулировать и доказать теорему об однозначности разложения на простые множители для элементов $\mathbb{Z}[i]$.

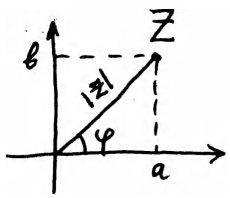
10.** Доказать, что простое (в обычном смысле) число p будет простым в $\mathbb{Z}[i]$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + y^2 = p$ не имеет решений в обыкновенных целых числах.

11.** (Продолжение.) Доказать, что это бывает тогда и только тогда, когда p дает остаток 3 при делении на 4.

12.* Доказать, что если $1/z_1 + 1/z_2 + \ldots + 1/z_n = 0$ то найдутся такие положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n = 0$.

Комплексные числа, часть II

I. Модуль и аргумент.



Напомним, что комплексное число $z=a+bi$ изображается точкой $Z\langle a,b\rangle$, а расстояние от начала координат до точки Z называется модулем числа z и обозначается $|z|$: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Аргументом числа z называется величина угла φ, на который нужно повернуть ось абсцисс для того, чтобы она проходила через точку Z. Число φ определено с точностью до кратных 360^0 (или 2π, если углы измеряются в радианах): если φ – аргумент z, то $\varphi+360\cdot k$ $(\varphi+2\pi k)$ – также аргумент z (при целых k).

1. Найти модуль и аргумент чисел i, $1+i$, $\sqrt{3}+i$, $3-4i$, -7.

2. Число z имеет модуль r и аргумент φ. Найти его действительную и мнимую части.

3. По модулю и аргументу (измерен в радианах) найти число:
(1) $2,\pi$; (2) $0,\pi/3$; (3) $\sqrt{2},-\pi/4$; (4) $-2,3\pi/2$; (5) $1,\pi/2$.

4. Число z_1 имеет модуль r_1 и аргумент φ_1, число z_2 имеет модуль r_2 и аргумент φ_2. Доказать, что их произведение z_1z_2 имеет модуль $r_1\cdot r_2$ и аргумент $\varphi_1+\varphi_2$. (Указание. Использовать формулы для синуса и косинуса суммы.)

> При умножении комплексных чисел модули умножаются, а аргументы складываются!

Мы видим, что аргумент подобен логарифму: аргумент произведения есть сумма аргументов. Это не случайно: на самом деле аргумент есть (при надлежащем понимании этих слов) "мнимая часть логарифма".

Обозначим через $U(\varphi)$ комплексное число с модулем I и аргументом φ.

5. Доказать, что $U(\varphi_1+\varphi_2)=U(\varphi_1)\cdot U(\varphi_2)$, $U(-\varphi)=1/U(\varphi)=\overline{U(\varphi)}$.

6. Доказать, что при целом n выполнено равенство $U(n\varphi)=[U(\varphi)]^n$.

7. Используя формулы $(a+b)^2=\dots$, $(a+b)^3=\dots$ и предыдущую задачу, выразить $\cos2\varphi$, $\sin2\varphi$, $\cos3\varphi$, $\sin3\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

8.* Вычислить суммы $\cos\varphi+\cos2\varphi+\dots+\cos n\varphi$ и $\sin\varphi+\sin2\varphi+\dots+\sin n\varphi$. (Указание. Использовать функцию U и формулу суммы геометрической прогрессии.)

9.* Вычислить суммы $\cos\varphi+2\cos2\varphi+\dots+n\cos n\varphi$ и $\sin\varphi+\sin2\varphi+\dots+n\sin n\varphi$.

10. Пусть φ – произвольное число. Рассмотрим преобразование f комплексной плоскости, являющееся умножением на $U(\varphi)$: $f(z)=z\cdot U(\varphi)$. Что это за преобразование?

11.* Пусть w – произвольное комплексное число. Доказать, что преобразование умножения на w ($z\longmapsto wz$) есть преобразование подобия, являющееся композицией поворота и гомотетии. Найти угол поворота и коэффициент гомотетии.

12.* **Доказать, что** $\cos\varphi+\cos\left(\varphi+\frac{360}{n}\right)+\cos\left(\varphi+2\cdot\frac{360}{n}\right)+\dots+\cos\left(\varphi+(n-1)\frac{360}{n}\right)=0$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geq2,\ \varphi\in\mathbb{R})$.

2. Разные задачи.

I3.* Доказать, что если числа a, b, c являются вершинами равностороннего треугольника, то $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$. Верно ли обратное?

I4. Какие значения может принимать аргумент числа z, если $|z-2i|<1$?

I5.* Найти множество тех z, для которых (I) $|(z-1)/(z+1)|=1$; (2) $|(z-1)/(z+1)|=2$.

I6.* На плоскости даны точки a и b. Где находятся те z, для которых число $(z-a)/(z-b)$ (I) действительное; (2) чисто мнимое?

I7.* Доказать, что уравнение вида $z\bar{z}+az+\bar{a}\bar{z}+c=0$, где $a\in\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{R}$, задает пустое множество, точку или окружность. Как определить, что именно? Всякую ли окружность можно так задать?

3. Корни из единицы.

I8. Найти все z, для которых $z^n=1$. (Их n.) Они называются корнями n-ой степени из I.

I9. Найти все z, для которых $z^n=a$ (a – заданное комплексное число).

20.* Если z – корень n-ой степени из I, то z^k – также корень n-ой степени из I (при любом k). Если среди z^k при всех $k\in\mathbb{Z}$ встречаются все корни n-ой степени из I, то z называют первообразным корнем. Сколько существует первообразных корней n-ой степени, если (I) $n=6$; (2) $n=100$?

2I.* Доказать, что сумма всех корней n-ой степени из I равна 0 (при $n>1$).

22.* Дан правильный многоугольник $A_1\ldots A_n$. Доказать, что сумма $|XA_1|^2+|XA_2|^2+\ldots+|XA_n|^2$ зависит лишь от расстояния от точки X до центра описанной около многоугольника окружности.

23.* Имеется конечное множество $S\subset\mathbb{C}$, для которого выполнено такое свойство: произведение двух элементов из S принадлежит S. Известно, что $0\notin S$. Доказать, что: (I) $1\in S$; (2) если $x\in S$ то $1/x\in S$; (3) $|x|=1$ для всех $x\in S$; (4) всякий элемент $x\in S$ является корнем некоторой степени из I; (5) S состоит из всех корней степени n из I, где n – число элементов в S.

24.* Найти произведение всех корней степени n из I.

25.* Число x является корнем из I степеней a и b. Доказать, что оно является корнем из I степени НОД (a, b). В частности, ни

одно число (кроме 1) не может одновременно быть корнем из 1 степеней a и b, если a и b взаимно просты.

26.* Существует ли число z с $|z|=1$, не являющееся корнем из 1 (ни для какой степени)?

27.** Является ли число $3/5 + 4/5\,i$ корнем из 1?

28.** Какие числа вида $a+bi$, где a и b рациональны, являются корнями из 1? (Ответ: $1, -1, i, -i$.)

4. Инверсия.

Инверсией с центром O и радиусом r называется преобразование, переводящее каждую отличную от O точку X в такую точку X', лежащую на луче OX, что $|OX|\cdot|OX'| = r^2$.

29. Какие точки неподвижны при инверсии? Чему равно $f \circ f$, если f – инверсия?

30. Доказать, что если f – инверсия, а точки A и B не лежат на прямой, проходящей через центр инверсии, то около четырехугольника с вершинами A, B, $f(A)$, $f(B)$ можно описать окружность.

31.* Доказать, что при инверсии прямые, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности, проходящие через центр инверсии; наоборот, окружности, проходящие через центр, переходят в прямые, не проходящие через центр.

32.* Доказать, что окружности, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности, не проходящие через центр инверсии.

33.* Куда переходит число z при инверсии с центром 0 и радиусом 1?

34.* Нарисовать множество $\{z \mid \mathrm{Re}(1/z) = 1/2\}$.

35.* Доказать, что при преобразовании $z \mapsto 1/z$ прямые и окружности переходят в прямые и окружности (хотя окружности монут перейти в прямые, а прямые – в окружности).

36.* Доказать, что любое дробно-линейное преобразование (преобразование вида $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$) является композицией нескольких преобразований, каждое из которых есть либо сдвиг ($z \mapsto z+c$), либо гомотетия ($z \mapsto kx$, $k \in \mathbb{R}$), либо поворот вокруг начала координат, либо преобразование $z \mapsto 1/z$. Что будет при $ad-bc=0$?

37.* Доказать, что при дробно-линейном преобразовании прямые и окружности переходят в прямые и окружности.

38.* Доказать, что при инверсии сохраняются углы между окружностями и прямыми: если окружности (или окружность и прямая, или две прямые) пересекались под углом α, то их образы тоже пересекаются под углом α (Угол измеряется как угол между касательными.)

39.* Доказать, что любое дробно-линейное преобразование сохраняет углы между прямыми и окружностями.

40.* Построить дробно-линейное преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость $\{z \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ в единичный круг $\{z \mid |z| < 1\}$.

Многочлены

А. Кольцо многочленов

Определения. Многочленом называется выражение $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, где a_i – числа, называемые коэффициентами. Два многочлена считаются равными, если равны их коэффициенты. При записи обычно опускаются члены с нулевым коэффициентом и единичные коэффициенты, так что $1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$ записывается как $1 + x^2$ (или $x^2 + 1$ – слагаемые часто переставляют). Степенью ненулевого многочлена P называют наибольшую из степеней его членов (с ненулевыми коэффициентами). Она обозначается $\deg P$ (degree (англ) = степень).

Определим операции сложения и умножения многочленов. Суммой многочленов $a_0 + a_1 x + \ldots$ и $b_0 + b_1 x + \ldots$ называется многочлен $c_0 + c_1 x + \ldots$, где $c_i = a_i + b_i$, а произведением – многочлен $d_0 + d_1 x + \ldots$, где $d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$ (складываются произведения коэффициентов при степенях, дающих в сумме n).

1. Что можно сказать о $\deg(P+Q)$ и $\deg(PQ)$, если известно, что $\deg P$ и $\deg Q$ равны соответственно (1) 5 и 7; (2) 7 и 7?

2. Найти коэффициент при x^{13} в многочлене $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{1983})(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{1984})$

3. Известно, что произведение двух многочленов равно 0. Можно ли утверждать, что один из них равен 0 ?

4. Доказать, что если $P \cdot Q = P \cdot R$, причем $P \neq 0$, то $Q = R$. (Указание. См. предыдущую задачу.)

5. Для каких многочленов P найдется такой многочлен Q, что $PQ = 1$?

6. Доказать, что коэффициент при x^n в произведении $(a_0 + a_1 x + \ldots)(b_0 + b_1 x + \ldots)(c_0 + c_1 x + \ldots)$ равен сумме всех произведений вида $a_k \cdot b_l \cdot c_m$, для которых $k + l + m = n$.

7. Найти коэффициент при x^n в $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^k$

8. Многочлены P и Q имеют целые коэффициенты. Все коэффициенты их произведения PQ делятся на 5. Доказать, что все коэффициенты P делятся на 5 или все коэффициенты Q делятся на 5.

Строго говоря, определение многочлена не вполне ясно: будет ли, например, $1 + y + y^2$ многочленом? Равен ли он многочлену $1 + x + x^2$? И вообще, что такое многочлен? Формальное определение таково: многочленом называется произвольная последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots$ в которой конечное число ненулевых членов. Отказавшись от требования конечности, мы получаем определение формального степенного ряда.

Ряды можно складывать и умножать по тем же формулам, что и многочлены.

9. Верно ли, что если произведение двух рядов равно 0, то один из них равен 0 ?

10. Какие ряды имеют обратные? (Ряд Q - обратный для P, если $PQ = 1$.) Найти обратный ряд для $1 + x$.

11. Найти обратный ряд к ряду $1 + 2x + 4x^2 + \ldots + 2^n x^n + \ldots$

12. Найти обратный ряд к ряду $1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n! + \ldots$

13. Определим производную P' многочлена $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ формулой $P' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$. Докажите правила дифференцирования: $(P+Q)' = P' + Q'$, $(cP)' = cP'$, $(PQ)' = P'Q + Q'P$.

Б. Значения

Значением многочлена $P = a_0 + a_1 x + \ldots$ на числе α называется число $P(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + \ldots$. Таким образом, с каждым многочленом сопоставляется функция $\alpha \longmapsto P(\alpha)$, которую часто отождествляют с исходным многочленом (и обозначают той же буквой). Это отождествление согласовано со сложением и умножением: $(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$ и $(PQ)(\alpha) = P(\alpha)\,Q(\alpha)$. Число α называется <u>корнем</u> многочлена, если $P(\alpha) = 0$.

14. Придумать многочлен степени 4, имеющий корни 1,2,3,4.

15. Найти все корни многочлена $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. (Указание. $(x-1)(x-2)(x-3) = ?$)

16. Существует ли многочлен степени 1, у которого $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 4$?

17. Пусть P и Q - многочлены степеней m и n. Доказать, что композиция соответствующих функций также соответствует некоторому многочлену: найдется такой многочлен R, что $R(a) = P(Q(a))$ Какова степень многочлена R ?

18. Найти сумму всех коэффициентов многочлена $(1 + x - x^2)^{1983}\,(1 + 2x - 2x^2)^{1984}$.

19. Многочлен $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ имеет корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ Какие корни у многочленов (1) $a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots + (-1)^n a_n x^n$; (2) $a_n + a_{n-1} x + \ldots + a_{n-k} x^k + \ldots + a_0 x^n$?

20. (Продолжение.) Написать многочлен, корнями которого были бы числа $2\alpha_1, \ldots, 2\alpha_k$ (выразив его коэффициенты через a_i).

21. Доказать, что все значения многочлена $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ (при всех действительных x) положительны.

22. Доказать, что если P - многочлен с целыми коэффициентами, a, b - целые числа, то число $P(b) - P(a)$ кратно $b - a$.

(Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.)

23. Доказать, что если α – целый корень многочлена $P=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ с целыми коэффициентами, то α – делитель a_0.

Эта задача позволяет найти все целые корни многочлена указанного вида, перебрав все делители a_0. Как показывает следующая задача, при этом мы найдем не только все целые, но и все рациональные корни.

если старший коэффициент равен 1, то

24. Доказать, что если α – рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом I, то α – целое число. Используя это, доказать иррациональность $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{2}$.

Отказываясь от требования "старший коэффициент равен I", получаем такое обобщение (позволяющее найти все рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами).

25. Доказать, что если p/q – несократимая дробь, являющаяся корнем многочлена $a_n x^n + \ldots + a_0$ с целыми коэффициентами, то a_0 делится на p, а a_n делится на q. Выведите отсюда утверждения двух предыдущих задач.

26. Найдите все рациональные корни многочленов $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ и $6x^3 - 7x^2 + 1$, используя предыдущую задачу.

27. Существует ли такой многочлен P, что $P(n)=2^n$ при всех натуральных n?

28. Существует ли такой многочлен P с целыми коэффициентами степени не меньше I, что $P(n)$ – простое число при всех натуральных n?

29. Существует ли такой многочлен P, что $\cos 17x = P(\cos x)$ при всех x?

30. Рассмотрим все функции f, которые сопоставляют с каждым многочленом P некоторое число $f(P)$, причем $f(P+Q)=f(P)+f(Q)$, $f(PQ)=f(P)\cdot f(Q)$ и если $P=a_0$ – многочлен степени 0, то $f(P)=a_0$. Докажите, что функция, сопоставляющая с каждым многочленом

(I) сумму всех его коэффициентов; (2) его свободный член; (3) его значение $P(a)$ в некоторой фиксированной точке a – таковы. Докажите, что (I) и (2) представляют собой частные случаи (3). Верно ли, что любая такая функция имеет вид $P \mapsto P(a)$ для некоторого a?

3I. Какими должны быть коэффициенты a, b, c, чтобы многочлен ax^2+bx+c принимал целые значения во всех целых точках?

Многочлен $Q(x)=P(x+1)-P(x)$ называется "разностной производной" многочлена P.

32. Как связаны степени P и Q?

33. Доказать, что для любого многочлена Q степени не выше n найдется многочлен P степени не выше $n+1$ ("разностный интеграл"), для которого $P(x+1)-P(x)=Q(x)$ при всех x.

34. С последовательностью $a_0, a_1, a_2, \ldots$ проделали такую операцию: под каждыми двумя членами последовательности написали их разность. Затем эту операцию повторяют. Доказать, что если исходной была последовательность $P(0), P(1), \ldots$, где P - некоторый многочлен, то через несколько шагов получится последовательность из одних нулей. Верно ли обратное?

a_0	a_1	a_2	$\ldots$
a_1-a_0	a_2-a_1	$\ldots$	
$\ldots\ldots$			

35. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, для которого $P(7)=11$, $P(11)=13$?

В. Делимость и корни

Говорят, что многочлен P <u>делится</u> на многочлен Q (обозначение $P \vdots Q$), если существует такой многочлен R, что $P=Q\cdot R$.

36. Делится ли (1) x^2 на x^3+1; (2) x^2+3x на $2x+6$?

37. Какие многочлены являются делителями многочленов (1) 1 (2) 0; (3) $1+x$?

38. Доказать, что если P, Q, R, S - многочлены, $PQ=RS$ и $P \vdots R$, то $S \vdots Q$.

39. (Теорема о делении с остатком.) Пусть A и B - многочлены, $B \neq 0$. Тогда существуют и единственны такие многочлены Q (частное) и R (остаток), что $A=BQ+R$ и ($\deg R < \deg B$ или $R=0$).

40. Найти частное и остаток при делении x^7+x^5+1 на $2x^2-4$.

41. Доказать, что если $B \vdots C$, то A и $A+B$ дают одинаковые остатки при делении на C.

42. Делится ли $x^{10}-1$ на x^2+1?

43. (Теорема Безу.) Пусть P - многочлен, a - число. При делении P на $x-a$ остаток равен $P(a)$.

44. Доказать, что свойства $P \vdots (x-a)$ и $P(a)=0$ равносильны.

45. При каких c многочлен $x^{1984}+x^3+c$ делится на $x-1$?

46. Если $a_1, \ldots, a_n$ - различные корни многочлена P, то P делится на $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

47. Доказать, что многочлен степени n имеет не более n корней.

48. Доказать, что если многочлены P и Q задают одну и ту же функцию, то есть $P(x) = Q(x)$ при всех x, то P и Q равны (то есть имеют равные коэффициенты).

49. (Формулы Виета.) Многочлен $x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ имеет k различных корней $x_1, \ldots, x_k$. Выразить коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ через корни.

50. Доказать, что для любого многочлена P свойства (I) $P(-1) = P(1) = 0$ и (2) $P \vdots (x^2 - 1)$ равносильны.

5I. Доказать, что если $P \vdots Q$, то (множество корней P) $\subset$ $\subset$ (множество корней Q). Верно ли обратное?

52. Доказать, что если $P(a) = Q(a)$ при бесконечно многих a, то многочлены P и Q равны.

53. Известно, что многочлен P дает при делении на $x - 1$ остаток 3, а при делении на $x + 1$ остаток 5. Определить остаток при делении P на $x^2 - 1$.

54. При каких p и q остаток от деления $x^5 + 3x^3 + px^2 + qx + 3$ на $x^2 + 2$ равен $x + 1$?

55. При каких n и k многочлен $x^n - 1$ делится на $x^k - 1$?

56. Остатки при делении многочлена P на $(x - a)$, $(x - b)$ и $(x - c)$ равны соответственно a^2, b^2, c^2 (a, b, c – различные числа). Найти остаток при делении P на $(x-a)(x-b)(x-c)$.

57. Доказать, что если $\begin{cases} a + b + c + d = 0, \; a + 2b + 4c + 8d = 0 \\ a + 3b + 9c + 27d = 0, \; a + 4b + 16c + 64d = 0 \end{cases}$

то $a = b = c = d = 0$

58. Найти остаток от деления $x^{1984} - 1$ на $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$

59. Решить уравнение $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

(Указание. Один из корней равен – I.)

60. (Интерполяция.) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – различные числа, $y_1, \ldots, y_n$ – произвольные числа. Доказать, что существует и единствен многочлен P, степень которого не выше $n - 1$ и $P(x_i) = y_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. (Другими словами, через n точек плоскости, никакие две из которых не лежат на одной вертикали, проходит единственный график многочлена степени не выше $n - 1$.) (Указание. Единственность вытекает из того, что число корней многочлена не больше его степени. Для доказательства

существования рассмотрите сначала случай, когда все y_i, кроме одного, равны 0.)

61. Найдите многочлен степени не выше 3, для которого $P(0)=1$, $P(1)=-1$, $P(2)=1$, $P(3)=-1$

62. Многочлен P таков, что $P(x)=P(-x)$ при всех x. Доказать, что найдется такой многочлен Q, что $P(x)=Q(x^2)$ при всех x.

63. Многочлен P таков, что $P(x)=-P(-x)$ при всех x. Доказать, что найдется такой многочлен Q, что $P(x)=xQ(x^2)$ при всех x.

64. Доказать тождество $\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1$.

65. Доказать, что если P – многочлен степени n и $P(x)$ целое при всех целых x, то все коэффициенты многочлена $n!P$ целые. Можно ли утверждать, что все коэффициенты P целые?

66. Обозначим через C_x^n многочлен $x(x-1)\ldots(x-n+1)/n!$ Доказать, что всякий многочлен степени n однозначно представляется в виде $a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + \ldots + a_1 C_x^1 + a_0$

67. (Продолжение.) Доказать, что для любого многочлена P свойства (1) $P(m)$ целое при всех целых m; (2) коэффициенты $a_n, \ldots, a_0$ в представлении, рассмотренном в предыдущей задаче, целые, – равносильны.

68. Доказать, что всякий многочлен степени 3 однозначно представляется в виде (1) $a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3$
(2) $a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$

69. Число a называется корнем многочлена P кратности k, если P делится на $(x-a)^k$. (Таким образом, обычные корни – корни кратности 1.) Доказать, что свойства (1) a – корень многочлена P кратности k; (2) $P(a)=P'(a)=\ldots=P^{(k-1)}(a)=0$ ($P^{(i)}$ – i-ая производная многочлена P), – равносильны.

Д. Делимость в кольце многочленов.

Напомним, что многочлен P делится на Q (запись $P \vdots Q$), если существует такой многочлен R (частное), что $P=Q\cdot R$.

70. Что можно сказать о многочленах P и Q, если $P \vdots Q$ и $Q \vdots P$?

Многочлен S называется <u>наименьшим общим кратным</u> (НОК) многочленов P и Q, если выполнены 2 условия:

(1) S – их общее кратное, т.е. $S \vdots P$, $S \vdots Q$;

(2) если S' – любое общее кратное P и Q, то S' кратно S ($S' \vdots P$, $S' \vdots Q \Rightarrow S' \vdots S$).

71. Доказать, что многочлен S наименьшей степени, кратный P и Q, является их наименьшим общим кратным. (Указание. Пусть S' – любоее общее кратное. Разделите S' на S с остатком.)

72. Доказать, что любые два наименьших общих кратных данных многочленов отличаются на ненулевой постоянный множитель.

Две предыдущие задачи показывают, что наименьшее общее кратное всегда существует (что из определения сразу не вытекает) и почти единственно (если пренебречь постоянным множителем). Следующие задачи утверждают то же самое про наибольший общий делитель.

Многочлен S называется <u>наибольшим общим делителем</u> (НОД) многочленов P и Q, если выполнены 2 условия:

(I) S является их общим делителем, то есть $P \vdots S$, $Q \vdots S$

(2) если S' – их общий делитель, то S' – делитель S : $P \vdots S'$, $Q \vdots S' \Rightarrow S \vdots S'$

Заметим, что из определения не следует, что такой многочлен S существует. Мы докажем это впоследствии (и даже несколькими способами).

73. Найти многочлен, являющийся наибольшим общим делителем многочленов P и 0 (нуль).

74. Пусть P дает при делении на Q остаток R. Доказать, что многочлен S является наибольшим общим делителем P и Q тогда и только тогда, когда он является наибольшим общим делителем многочленов Q и R.

Таким образом, если мы желаем доказать существование или найти наибольший общий делитель многочленов P и Q, можно заменить P его остатком при делении на Q. Такую замену (переход от пары P, Q с $\deg P \geq \deg Q$ и $Q \neq 0$ к паре Q, (остаток от деления P на Q)) мы будем называть "преобразованием Евклида".

75. Пусть P, Q – произвольные многочлены, $\deg P \geq \deg Q$. Будем применять к ним преобразование Евклида, пока это возможно. Чем закончится этот процесс? Как найти после этого НОД (P, Q)?

Этот способ отыскания наибольшего общего делителя называется <u>алгоритмом Евклида</u>. Из этой задачи, в частности, следует, что наибольший общий делитель всегда существует.

76. Найти НОД многочленов (I) $x+1$ и x^2+1; (2) $x^{15}-1$ и x^9-1; (3) $x^4+3x^3+5x^2+4x+2$ и $x^5+x^4+2x^3-1$.

77. Пусть R_1 и R_2 являются наибольшими общими делителями многочленов P и Q. Как связаны они между собой?

78. (Другое доказательство существования НОД.) Пусть S – наименьшее общее кратное многочленов P и Q. Доказать, что $PQ : S$ и частное R от деления PQ на S является наибольшим общим делителем многочленов P и Q. (Это рассуждение не дает, однако, способа отыскания НОД, т.к. требует знания наименьшего общего кратного.)

79. Пусть S и T – НОК и НОД многочленов P и Q. Доказать, что $PQ = k\,ST$, где k – ненулевое число.

Будем говорить, что многочлен R выразим через многочлены P и Q, если найдутся такие многочлены A и B, что $R = AP + BQ$.

80. Выразимы ли многочлены: (1) $x+1$ через x и x^2; (2) 1 через x и $x+1$?

81. Какие многочлены выразимы через (1) $x+1$ и x; (2) x^2 и x^2+x?

82. Пусть P и Q – произвольные многочлены. Доказать, что сумма и разность многочленов, выразимых через P и Q, выразимы через P и Q. Доказать, что произведение произвольного многочлена и многочлена, выразимого через P и Q, выразимо через P и Q.

83. Пусть P и Q – произвольные многочлены. Доказать, что через P и $P-Q$ выразимы те же самые многочлены, что и через P и Q.

84. Доказать, что, применяя преобразование Евклида к паре многочленов, мы не меняем множество выразимых через них многочленов: если при делении P на Q получается остаток R, то через Q и R выразимы те же многочлены, что и через P и Q.

85. Пусть P и Q – произвольные многочлены. Доказать, что через них выразимы те и только те многочлены, которые делятся на НОД(P, Q). (Указание. См. предыдущую задачу.)

86. Выразить (1) $x+1$ через x^4+1 и x^3+1; (2) 1 через $(x-2)(x-3)$ и $x(x-1)$.

Следующие задачи содержат еще одно доказательство существования НОД любых двух многочленов.

Множество I многочленов называется <u>идеалом</u>, если оно обладает такими свойствами:

(1) $A, B \in I \Rightarrow A+B,\ A-B \in I$

(2) $A \in I$, B – любой многочлен $\Rightarrow AB \in I$

87. Будут ли идеалами: (I) множество всех многочленов с нулевым свободным членом; (2) множество всех ненулевых многочленов: (3) множество всех кратных данного многочлена P ; (4) множество всех многочленов, выразимых через данные многочлены P и Q ; (5) множество всех многочленов, для которых $P(1) = 0$; (6) множество всех многочленов, для которых $P(1)=P(2)=0$; (7) множество всех многочленов, для которых $P(1)+P(2)=0$; (8) множество всех многочленов с рациональными коэффициентами?

88. Пусть I - произвольный идеал, P - многочлен наименьшей степени, содержащийся в I . Доказать, что идеал I состоит из всех кратных многочлена P и только из них. (Указание. Использовать теорему о делении с остатком.)

Идеал, состоящий из всех кратных многочлена P , называется главным идеалом с образующей P . Таким образом, утверждение предыдущей задачи может быть сформулировано так: в кольце многочленов (с действительными коэффициентами) всякий идеал является главным.

89. Многочлены P и Q являются образующими одного и того же идеала I . Как они связаны?

90. Найти образующие идеалов (I) многочленов с нулевым свободным членом; (2) многочленов P , для которых $P(1)=0$; (3) многочленов P , для которых $P(1) = P(2) = 0$.

9I. Пусть I - идеал всех многочленов, выразимых через P и Q ; D - его образующая. Доказать, что D есть наибольший общий делитель P и Q . (Из этой задачи следует, помимо существования наибольшего общего делителя, также и описание выразимых через P и Q многочленов, см. задачу 85.)

92. Пусть I и J - идеалы. Доказать, что $I \cap J$ и $I + J = \{i+j \mid i \in I, j \in J\}$ - идеалы. Как связаны их образующие с образующими идеалов I и J ?

Многочлены P и Q называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, кроме констант (т.е. если $1 = НОД(P,Q)$).

93. Доказать, что свойства (I) P и Q взаимно просты; (2) существуют такие многочлены X и Y , что $XP+YQ = 1$, - равносильны.

94. (Продолжение.) Доказать, что если P и Q взаимно просты, то найдутся такие X и Y , что $XP+YQ=1$, $\deg X<\deg Q$, $\deg Y<\deg P$.

95. (Основная лемма о взаимной простоте.) Если AB делится на C , а A взаимно просто с C , то B делится на C. (Указание. Если $XA+YC=1$, то $B=B(XA+YC)$.)

Многочлен P, не являющийся константой, называется простым, или неприводимым, если в любом его разложении на 2 множителя один из них - константа: если $P=QR$, то Q или R - константа.

96. Доказать, что если P неприводим, а Q - любой многочлен, не делящийся на P, то Q взаимно прост с P.

97. Доказать, что если произведение двух многочленов делится на неприводимый многочлен P, то один из них делится на P.

98. (Продолжение.) Доказать то же самое для произведения произвольного числа многочленов.

99. Доказать, что всякий многочлен, отличный от константы, можно разложить в произведение неприводимых.

100. Доказать, что разложение на неприводимые множители единственно: если $A = P_1 \cdot \ldots \cdot P_n = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_m$ то $m = n$ и после подходящей перенумерации можно получить $P_i = c_i Q_i$, где c_i - константы.

101. Для каких многочленов P равенство $xP(x-1)=(x-26)P(x)$ справедливо при всех x?

102. Известно, что $(x-1)(x^2+px+q)=(x-3)(x^2+rx+s)=(x-5)(x^2+lx+m)$ при всех x. Найти p, q, r, s, l, m.

Д. Основная теорема алгебры и ее следствия.

До сих пор мы неявно предполагали, что коэффициентами многочленов являются действительные числа. Однако все наши рассуждения остаются в силе и для многочленов с комплексными коэффициентами. Комплексный случай даже проще вещественного, так как имеет место

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один (комплексный) корень.

Доказательство этой теоремы использует сведения из курса анализа и будет дано впоследствии.

103. Доказать, что всякий многочлен P с комплексными коэффициентами разлагается на линейные множители, т.е. представим в виде $k(x-a_1)\ldots(x-a_n)$, где n - степень P, $a_1, \ldots, a_n$ и k - комплексные числа.

104. Доказать, что если z - (комплексный) корень многочлена с действительными коэффициентами, то $\overline{z}$ - также его корень.

105. Как изменятся корни многочлена с комплексными коэффициентами и его разложение на линейные множители (задача 103), если все коэффициенты многочлена заменить на комплексно-сопряженные?

I06. Доказать, что в разложении на линейные множители (задача I03) многочлена с действительными коэффициентами все множители $(x-\alpha)$ с $\alpha \notin \mathbb{R}$ можно разбить на пары $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$ комплексно сопряженных.

I07. Доказать, что всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных и квадратных множителей с действительными коэффициентами, т.е. представим в виде
$$c(x-a_1)\dots(x-a_k)(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_sx+q_s).$$
Обратите внимание, что в условии этой задачи нет ни слова о комплексных числах – они появляются только в её решении !

I08. Доказать, что всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

I09. Найти многочлен с действительными коэффициентами наименьшей степени, для которого $1+i$, $2-i$ и 3 – корни.

II0. Разложить на линейные множители (с комплексными коэффициентами) многочлены x^2+1, x^4+1, x^n-1, x^n+1.

III. Пусть P – многочлен с комплексными коэффициентами, $x_1,\dots,x_s$ – его корни, $k_1,\dots,k_s$ – их максимальные кратности. Доказать, что $P=a(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_1)^{k_s}$ где a – старший коэффициент многочлена P.

II2. Доказать, что многочлен степени n имеет n (комплексных) корней, если каждый корень учитывать столько раз, какова его кратность.

II3. Доказать, что для любых двух многочленов P и Q свойства (I) $P:Q$ и (2) всякое комплексное число z, являющееся корнем Q кратности k, является корнем P кратности k, – равносильны. (Напомним, что согласно нашему определению всякий корень кратности k является корнем кратности l при $l<k$!)

II4. Доказать, что если многочлен с действительными коэффициентами принимает во всех действительных точках неотрицательные значения, то его можно представить в виде $P=Q_1^2+\dots+Q_l^2$ где $Q_1,\dots,Q_l$ – многочлены с действительными коэффициентами.

II5. Пусть P – произвольный многочлен степени $n\geq 1$ с комплексными коэффициентами. Доказать, что задаваемая им функция $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ является наложением.

II6. (Продолжение.) Доказать, что при этом отображении каждая точка $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа точек, имеет ровно n прообразов.

II7. Доказать, что в задаче II4 можно положить $l=2$.

Е. Различные множества коэффициентов

Все рассмотренные в пп. А – Г свойства многочленов справедливы для многочленов с коэффициентами в любом поле (полем называется множество с операциями сложения, умножения, взятия обратного и противоположного, 0 и I, удовлетворяющим обычным аксиомам). В частности, все эти свойства справедливы для многочленов с рациональными, действительными и комплексными коэффициентами.

Однако если мы рассматриваем многочлены с целыми коэффициентами, то ситуация меняется (т.к. $\mathbb{Z}$ не поле: нет взятия обратного).

I18. Привести примеры, показывающие, что теорема о делении с остатком и теорема о главных идеалах не выполняются для многочленов с целыми коэффициентами.

К многочленам с целыми коэффициентами мы еще вернемся; рассмотрим теперь, что меняется при переходе от одного поля к другому (от $\mathbb{Q}$ к $\mathbb{R}$ и от $\mathbb{R}$ к $\mathbb{C}$). Соответствующие множества многочленов обозначаются $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}[x]$

I19. Доказать, что свойство делимости не меняется при расширении поля: если $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$, то $P : Q$ в $\mathbb{Q}[x]$ равносильно $P : Q$ в $\mathbb{R}[x]$. (Аналогично для $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}[x]$.)

I20. Доказать, что наибольший общий делитель не меняется при расширении поля: если $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ и R – их наибольший общий делитель, то он останется их наибольшим общим делителем в $\mathbb{R}[x]$.

I2I. Какие многочлены являются неприводимыми (I) в $\mathbb{C}[x]$; (2) в $\mathbb{R}[x]$?

I22. Будут ли неприводимыми в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены (I) $x-1$; (2) x^2-1; (3) x^2-2; (4) x^2+1 (5) x^3-2; (6) x^2+x+1; (7) x^3+x^2+x+1; (8) $x^4+x^3+x^2+x+1$; (9) x^4-2 ?

I23. Разложить многочлены предыдущей задачи на неприводимые множители в $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$.

Как видно из приведенных примеров, неприводимость (= простота), в отличие от взаимной простоты, существенно зависит от поля коэффициентов.

I24. При каких n многочлен $x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$?

Наиболее прост, как всегда, комплексный случай.

I25. Доказать, что многочлены $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ не взаимно просты тогда и только тогда, когда они имеют общий корень, т.е. существует такое $z \in \mathbb{C}$, что $P(z) = Q(z) = 0$.

126. Пусть $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{C}[x]$. Доказать, что следующие свойства равносильны:

(1) существуют такие многочлены $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathbb{C}[x]$, что $P_1 Q_1 + \ldots + P_n Q_n = 1$;

(2) не существует такого $z \in \mathbb{C}$, что $P_1(z) = \ldots = P_n(z) = 0$

127. Доказать, что если многочлен $P \in \mathbb{Q}[x]$ имеет кратный корень в $\mathbb{C}$, то он приводим в $\mathbb{Q}[x]$ (т.е. разлагается на множители с рациональными коэффициентами).

Изучим теперь подробнее $\mathbb{Z}[x]$ (кольцо многочленов с целыми коэффициентами)

128. Доказать, что если α – целый корень многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$ то $P = (x-\alpha) \cdot Q$, где Q – многочлен с целыми коэффициентами (теорема Безу для $\mathbb{Z}[x]$; напомним, что теорема о делении с остатком, вообще говоря, неверна в $\mathbb{Z}[x]$!)

129. Доказать, что если $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ таковы, что $P(x) = Q(x+1)$ при всех x, то они одновременно приводимы или неприводимы в $\mathbb{Z}[x]$.

Назовем содержанием многочлена с целыми коэффициентами наибольший общий делитель его коэффициентов.

130. (Лемма Гаусса.) Доказать, что произведение двух многочленов с содержанием 1 есть многочлен с содержанием 1. (Указание. Если все коэффициенты произведения PQ делятся на некоторое простое число p, а для сомножителей это не так, то произведение двух "ненулевых по модулю p" многочленов P и Q – "нулевой по модулю p многочлен".)

131. Доказать, что содержание произведения многочленов равно произведению их содержаний.

132. Доказать, что если многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$ разлагается на множители с рациональными коэффициентами: $P = RS$, $R, S \in \mathbb{Q}[x]$, то он разлагается и на множители с целыми коэффициентами $P = R_1 S_1$, причем R_1 и S_1 отличаются от R и S лишь рациональным множителем.

Таким образом, если многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$, то он неприводим и в $\mathbb{Z}[x]$.

133. Вывести из предыдущей задачи утверждение о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами (если p/q – несократимая дробь, являющаяся корнем $P = a_n x^n + \ldots + a_0$, то $a_0 \vdots p$, $a_n \vdots q$).

134. Придумать алгоритм, позволяющий по любому многочлену с целыми коэффициентами определить, будет ли он неприводим в $\mathbb{Z}[x]$ и $\mathbb{Q}[x]$. (Указание. (1) Если $P : Q$, то $P(a) : Q(a)$ при любом a; (2) Многочлен степени n определяется своими значениями в $n+1$ точке.)

I35. Доказать, что любой многочлен с целыми коэффициентами, отличный от I и – I; однозначно разлагается на неприводимые в $\mathbb{Z}[x]$ множители. (Указание. Воспользуйтесь установленной связью между разложениями в $\mathbb{Z}[x]$ и $\mathbb{Q}[x]$, а также однозначностью разложения в $\mathbb{Q}[x]$.)

I36. Доказать, что в $\mathbb{Z}[x]$ существуют НОД и НОК любой пары многочленов. (Напомним, что НОД – это общий делитель, делящийся на любой общий делитель, а НОК – общее кратное, делящее любое общее кратное.)

Разные задачи о многочленах

I. (Формула Тейлора) Доказать, что если P – многочлен, то $P(a+h) = P(a) + P'(a)h + P''(a)h^2/2! + \ldots + P^{(n)}(a)h^n/n!$ (правая часть продолжается до тех пор, пока слагаемые не обращаются в нуль).

2. Доказать, что если многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ степени n имеет n (различных) вещественных корней, то многочлен P' имеет $n-1$ (различных) вещественных корней. Остается ли это утверждение верным, если разрешить корням совпадать и учитывать кратности?

3. Доказать, что многочлен $1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n!$ не имеет кратных корней

4. Пусть P – многочлен с комплексными коэффициентами и старшим коэффициентом I. Доказать, что найдется точка $z \in \mathbb{C}$ с $|z| = 1$, для которой $|P(z)| \geqslant 1$.

5. Дан пятиугольник $ABCDE$ и окружность радиуса 1. Доказать, что на окружности найдется точка M, для которой $|MA| \cdot |MB| \cdot |MC| \cdot |MD| \cdot |ME| \geqslant 1$

6. Доказать, что комплексные корни многочлена P' лежат в выпуклой оболочке корней многочлена P. (Это значит, что если вбить в комплексную плоскость гвозди в корнях P и натянуть на них резинку, то корни P' окажутся внутри.)

7. (Оценка корней многочлена через коэффициенты.) Доказать, что любой корень многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ со старшим коэффициентом I не превосходит $\max(1, |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)$

8. Доказать, что для любого p найдется многочлен степени p с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом I, все значения которого в целых точках делятся на p.

9. (Продолжение.) Доказать, что для простого p не существует многочлена меньшей степени со свойством, указанным в предыдущей задаче.

Комплексное число называется <u>алгебраическим</u>, если оно является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Все остальные числа называются <u>трансцендентными</u>.

I0. Доказать, что существуют трансцендентные числа.

II. Если иррациональное число α таково, что при любом n неравенство $|\alpha - p/q| \leqslant 1/q^n$ имеет бесконечное число целочисленных решений, то α трансцендентно (теорема Лиувилля).

I2. Доказать, что число $\alpha = 0,$I1000I00... (единицы стоят на I, 2, 6 (=3!), 24 (=4!),... местах после запятой) трансцендентно.

I3. Доказать, что если $\alpha \neq 0$ – алгебраическое, то и $1/\alpha$ – алгебраическое число.

I4. Доказать, что если α и β – алгебраические числа, то $\alpha+\beta$ и $\alpha\cdot\beta$ – алгебраические.

I5. Доказать, что комплексное число z является алгебраическим тогда и только тогда, когда $\mathrm{Re}\,z$ и $\mathrm{Im}\,z$ являются алгебраическими.

I6. Пусть α – алгебраическое число. Рассмотрим все многочлены $P\in\mathbb{Q}[x]$, для которых $P(\alpha)=0$. Пусть P_0 – многочлен наименьшей степени среди них. Доказать, что любой многочлен $P\in\mathbb{Q}[x]$ для которого $P(\alpha)=0$, делится на P_0. (Указание. Множество таких P – идеал.) Многочлен P_0 называется <u>минимальным</u> многочленом алгебраического числа α.

I7. Найти минимальный многочлен чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

I8. Пусть $f:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ таково, что $f(P+Q)=f(P)+f(Q)$, $f(PQ)=f(P)\cdot f(Q)$ и $f(c)=c$ (c – константа = многочлен нулевой степени). Такие f называют <u>автоморфизмами</u> кольца $\mathbb{R}[x]$. Описать все автоморфизмы $\mathbb{R}[x]$. Какие из них являются взаимно однозначными?

I9. Доказать, что если значения многочлена P степени n в $n+1$ идущих подряд целых точках – целые, то его значения во всех целых точках – целые.

20. Многочлен P с комплексными коэффициентами таков, что $P(x)$ действительно при действительных x. Доказать, что его коэффициенты действительны. Что можно сказать о коэффициентах P, если $P(ix)\in\mathbb{R}$ при всех действительных x?

2I. (Критерий Эйзенштейна.) Доказать, что если многочлен $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ с целыми коэффициентами таков, что все коэффициенты (кроме старшего, равного I) делятся на некоторое простое p, причем a_0 не делится на p^2, то он неприводим в $\mathbb{Z}[x]$. (Указание. "По модулю p" – т.е. пренебрегая кратными p членами – этот многочлен есть x^n, поэтому его сомножители должны быть степенями x (по модулю p), а тогда a_0 делится на p^2.)

22. Доказать, что многочлен $Q(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+\ldots+1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$ тогда и только тогда, когда p простое. (Указание. Рассмотреть многочлен $Q(x+1)$ и воспользоваться критерием Эйзенштейна.)

23. Доказать, что если значение многочлена $P\in\mathbb{Z}[x]$ в трех целых точках равно I, то он не имеет целых корней.

24. Определить кольцо $\mathbb{R}[x,y]$ "многочленов от двух переменных" и доказать однозначность разложения на неприводимые в нем.

(Краткое указание. Многочлены с двумя переменными можно рассматривать как многочлены с одной переменной, коэффициенты которых - многочлены от другой переменной; далее поступать аналогично случаю $\mathbb{Z}[x]$.)

25. Доказать, что многочлен $1+x+x^2/2!+\ldots+x^n/n!$ имеет не более одного вещественного корня.

26. (Теорема Декарта.) Назовем <u>числом перемен знака</u> в последовательности действительных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ число пар соседних членов разных знаков (если в последовательности есть нули, выкинем их и подсчитаем число пар после этого). Доказать, что число положительных корней (с учетом кратности) многочлена с действительными коэффициентами равно числу перемен знаков в последовательности его коэффициентов или меньше его на (положительное) четное число.

27. (Продолжение.) Доказать, что если все корни многочлена действительны, то в предыдущей задаче имеет место равенство.

28. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - корни степени n из единицы. Найти многочлен степени $n-1$, равный 1 в одном из этих корней и 0 в остальных. Установить, что модули всех его коэффициентов равны $1/n$.

29. В единичную окружность на комплексной плоскости вписан правильный n-угольник. Доказать, что если $P \in \mathbb{C}[x]$ - многочлен степени $n-1$, один из коэффициентов которого по модулю не меньше I, то $|P(z)| \geq 1$ хотя бы для одной точки z, являющейся вершиной n-угольника. (Ср. задачу 4.)

30. Многочлен P_n, для которого $P_n(\cos x) = \cos nx$, называется n-ым <u>многочленом Чебышёва</u>. Доказать, что такой многочлен существует, единствен, имеет вещественные коэффициенты и степень n .

31. (Продолжение.) Найти корни многочленов Чебышёва и их старшие коэффициенты. (Указание. Ответ "старший коэффициент равен I " неверен.)

32. (Продолжение.) Найти число решений уравнений $P_n = 1$ и $P_n = -1$ на отрезке $[-1, 1]$ (P_n - n-ый многочлен Чебышёва).

33. (Продолжение.) Доказать, что если многочлен P с действительными коэффициентами таков, что $|P(x)| \leq 1$ при $|x| \leq 1$, то уравнение $P(x) = P_n(x)$ имеет не меньше n решений (P_n - n-ый многочлен Чебышёва). (Указание. См. задачу 32.)

34. Доказать, что если P – многочлен степени n с действительными коэффициентами и со старшим коэффициентом 1, то $|P(x)| \geq 1/2^{n-1}$ хотя бы для одного $x \in [-1, 1]$. Эту оценку нельзя улучшить.

35. Даны n точек $A_1 \ldots A_n$ и отрезок длины I. Доказать, что на отрезке найдется точка M, для которой $|MA_1| \cdot \ldots \cdot |MA_n| \geq 1/2^{2n-1}$.

36. Доказать, что многочлен $(x-a_1)\ldots(x-a_n)-1$ где $a_1, \ldots, a_n$ – различные целые числа, неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

Комплексное число называется <u>целым алгебраическим</u> числом, если оно есть корень многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом I.

37. Какие существуют целые алгебраические числа среди рациональных? Будет ли число $\sqrt{2}/2$ целым алгебраическим?

38. Доказать, что сумма и произведение целых алгебраических чисел – целое алгебраическое число.

39. Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2}$ иррационально.

40. Функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сопоставляющая с каждой парой действительных чисел $\langle x, y \rangle$ число $f(x,y)$, такова, что при каждом x функция $y \longmapsto f(x,y)$ совпадает с некоторым многочленом, а при каждом y функция $x \longmapsto g(x,y)$ совпадает с некоторым многочленом. Доказать, что f можно представить как сумму слагаемых вида $c_{kl} x^k y^l$. (Указание. Множество действительных чисел несчетно.)

41. Даны произвольные комплексные числа $a_0 \ldots a_n$ (среди которых, возможно, есть совпадающие) и произвольные комплексные числа $z_0, \ldots, z_n$. Доказать, что существует единственный многочлен P степени не выше n, для которого $P(a_0) = z_0$, $P'(a_1) = z_1$, $P''(a_2) = z_2, \ldots, P^{(n)}(a_n) = z_n$

Заказ 101-84. Тираж 50. ИПМ АН СССР

Аксиомы векторного пространства и их модели.

Пусть имеется некоторое множество E, в котором выделен элемент $\vec{0}$, задана функция взятия противоположного (обозначается $x \mapsto -x$), функция сложения, сопоставляющая с каждой парой $x, y \in E$ некоторый элемент $x+y \in E$, и функция умножения на число, сопоставляющая с каждой парой λ, x, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, некоторый элемент $\lambda x \in E$. Пусть при этом выполнены (для любых $x, y, z \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) такие свойства:

Аксиомы векторного пространства

(I) $x+(y+z) = (x+y)+z$; (2) $x+y = y+x$; (3) $x+\vec{0} = x$ (4) $x+(-x)=\vec{0}$;
(5) $0 \cdot x = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$; (6) $1 \cdot x = x$; (7) $\lambda \cdot (-x) = (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$;
(8) $(\lambda+\mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$; (9) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$; (IO) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

В таком случае называется векторным пространством, или линейным пространством, а его элементы – векторами. Обозначение: $x - y$ есть $x + (-y)$.

I. Вывести из (I) – (4) такие следствия: (I) $x + (y + (z+w)) = ((x+y)+z)+w$; (2) $(x+z = y+z) \Rightarrow (x=y)$; (3) $-(x+y) = (-x)+(-y)$.

2. Доказать, что $x + x = 2 \cdot x$

3. Доказать, что для любого вектора a найдется такой вектор x, что $a = x + x$.

4. Доказать, что если $\lambda x = \vec{0}$, то $\lambda = 0$ или $x = \vec{0}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$).

5. Справедливо ли свойство $\lambda x = x \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$)?

6. Вывести свойства (5) и (7) из остальных.

7.* Вытекает ли свойство (6) из остальных?

8. Доказать, что если $2x + 3y = \vec{0}$ и $3x + 5y = \vec{0}$ (x, y – векторы), то $x = 0$ и $y = 0$.

Примером векторного пространства является множество векторов на плоскости. Приведем еще некоторые примеры.

9. Как превратить $\mathbb{R}$ в векторное пространство?

IO. Пусть n – фиксированное натуральное число. Рассмотрим множество всех столбцов высоты n, составленных из действительных чисел. Определим сложение покомпонентно: $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$

Как надо определить 0, взятие противоположного и умножение на число, чтобы превратить это множество в векторное пространство? Это пространство называется $\mathbb{R}^n$.

II. Определить операции, превращающие в векторные пространства следующие множества: (I) $\mathbb{C}$; (2) множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел; (3) множество всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

I2. Пусть E и F – векторные пространства. Определить операции, превращающие множество пар $\langle e, f\rangle$ ($e \in E$, $f \in F$) в векторное пространство. Это пространство обозначается $E \oplus F$ и называется прямой суммой E и F.

Пусть E – векторное пространство, F – некоторое подмножество E. Говорят, что F – подпространство E, если $0 \in F$, из $x \in F$ следует $(-x) \in F$ и из $x, y \in F, \lambda \in \mathbb{R}$ следует $\lambda x, x+y \in F$. В этом случае F можно рассматривать как векторное пространство (с операциями, унаследованными из E). Тривиальные примеры: $F = \{0\}$ и $F = E$.

I3. Какие подпространства есть в пространстве $\mathbb{R}$? в пространстве всех векторов на плоскости?

I4. Образуют ли подпространство $\mathbb{R}^n$ те столбцы, у которых (I) первый элемент равен 0 ? (2) хоть один элемент равен 0 ? (3) все элементы рациональны ? (4) сумма всех элементов равна 0?

I5. Образуют ли подпространство в пространстве последовательностей последовательности, (I) имеющие предел ? (2) сходящиеся к 0 ? (3) сходящиеся к I ? (4) ограниченные? (5) монотонно возрастающие?

I6. По аналогии с плоскостью можно определить понятие вектора в пространстве. Привести примеры подпространств возникающего векторного пространства.

I7. Пусть E – пространство, K и L – его подпространства. Можно ли утверждать, что (I) $K \cap L$; (2) $K \cup L$ (3) $K+L = \{k+l \mid k \in K, l \in L\}$ – подпространства ?

I8. Как ввести операции на множестве многочленов, чтобы получить векторное пространство? Образуют ли подпространство те многочлены, у которых (I) степень $= n$; (2) степень $\leqslant n$; (3) $P(-t) = P(t)$ при всех t ; (4) 0 – корень; (5) 0 – корень производной; (6) $P(t) \geqslant 0$ при всех t ?

I9. Образуют ли подпространство пространства функций на решения дифференциального уравнения гармонического осциллятора, т.е. такие функции y, что $y''(t) + y(t) = 0$ при всех t ?

20. Ввести структуру векторного пространства на (I) множестве всех прямых плоскости, параллельных данной; (2) множестве всех прямых пространства, параллельных данной.

2I. Пусть F – подпространство E. Доказать, что E можно разбить на непересекающиеся классы, отнеся к одному классу те $x, y \in E$, для которых $x - y \in F$. Ввести на этих классах структуру векторного пространства. Оно называется факторпространством E по F и обозначается E/F.

Линейная оболочка

Пусть E – векторное пространство; $x_1, \dots, x_n, y$ – вектора из E. Говорят, что y линейно выражается через $x_1, \dots, x_n$, если найдутся такие действительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$

22. Выражается ли в $\mathbb{R}^2$ вектор $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ через $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

23. Какие вектора $\mathbb{R}^3$ выражаются через $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

24. Придумать такой набор векторов $\mathbb{R}^3$, чтобы через них выражались вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, но не выражается вектор $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

25. Пусть M – произвольное множество векторов пространства E Рассмотрим линейную оболочку M – множество $L(M)$ всех векторов, выразимых через вектора из M. Доказать, что $L(M)$ – наименьшее подпространство, содержащее M, т.е. что (I) $L(M)$ – подпространство; (2) $L(M)$ содержит M; (3) если F – подпространство, содержащее M, то $F \supset L(M)$.

26. Придумать 2 вектора в $\mathbb{R}^3$, через которые выражался бы любой вектор $\mathbb{R}^3$.

27. Доказать, что любой вектор $\mathbb{R}^4$ линейно выражается через вектора (I I I I), (I 2 3 4), (I 4 9 I6), (I 8 27 64), причем единственным образом.

Линейная зависимость.

Говорят, что вектора $x_1, \dots, x_n$ линейно зависимы, если существуют такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, не равные 0 одновременно, что $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$

28. Доказать, что система, содержащая (I) нулевой вектор; (2) два равных вектора; (3) линейно зависимую подсистему – линейно зависима.

29. В каком случае система из двух векторов зависима?

30. Когда система из 3 векторов плоскости зависима? Тот же вопрос для векторов в пространстве.

3I. Доказать, что система из 2 и более векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов выражается через остальные.

3I. (Продолжение.) Можно ли заменить "остальные" на "предыдущие"? А "один из" на "любой из"?

32. Доказать, что вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы в $\mathbb{R}^n$.

33. Доказать, что если векторы линейно независимы, то всякий вектор, через них выражающийся, делает это единственным образом (коэффициенты определены однозначно).

34. Будут ли зависимы вектора $\binom{1}{2}, \binom{3}{4}, \binom{5}{7}$ в $\mathbb{R}^2$? А вектора $\binom{1}{2}{3} \binom{2}{3}{4} \binom{3}{4}{5}$ в $\mathbb{R}^3$?

35. Вектора x и y линейно независимы. Могут ли вектора $2x+y$ и $x+3y$ быть линейно зависимыми?

36. Доказать, что (вектора $x_1 \ldots x_n$ линейно зависимы) $\Leftrightarrow$ (вектора $x_1+1985\,x_2, x_3, \ldots, x_n$ линейно зависимы).

37. Рассмотрим в пространстве функций систему $f_n : x \mapsto x^n$ $(n = 0,1,\ldots,N)$. Будет ли она линейно зависимой?

38. Тот же вопрос для системы $1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{Nx}$

39. Тот же вопрос для системы $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin Nx$

40. Тот же вопрос для системы $x^N, (x-1)^N, \ldots, (x-N)^N$

41. Функции $f_1, \ldots, f_n$ образуют линейно независимую систему. Доказать, что можно найти такие точки $x_1 \ldots x_n$, что вектора $\langle f_1(x_1) \ldots f_1(x_n)\rangle, \ldots, \langle f_n(x_1) \ldots f_n(x_n)\rangle$ линейно независимы.

42. В матрице (таблице, заполненной числами) размера 2 на 2 столбцы независимы. Доказать, что и строки независимы.

43. Решить предыдущую задачу с заменой 2 на n .

Прямые суммы

Говорят, что пространство E есть (внутренняя) прямая сумма своих подпространств E_1 и E_2, если всякий вектор из E однозначно представляется в виде суммы $e_1 + e_2$, где $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$. Обозначение: $E = E_1 \oplus E_2$. (Слово "внутренняя" отличает это определение он данного нами ранее; ту прямую сумму будем называть "внешней".)

44. Доказать, что $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow (E = E_1 + E_2,\ E_1 \cap E_2 = \{0\})$.

45. Доказать, что пространство всех функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть прямая сумма подпространств четных и нечетных функций.

46. Пусть E - подпространство $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов, первая компонента которых равна 0. Для каких F выполнено $E \oplus F = \mathbb{R}^n$?

47. Дать определение прямой суммы нескольких подпространств. Доказать, что если $X = A \oplus B$, $A = A_1 \oplus A_2$, то $X = A_1 \oplus A_2 \oplus B$.

48. Доказать, что если A - подпространство $\mathbb{R}^n$, то существует такое подпространство B, что $A \oplus B = \mathbb{R}^n$.

Базисы

Говорят, что векторы $x_1 \ldots x_n$ пространства E образуют базис, если (1) они линейно независимы; (2) любой вектор из E линейно выражается через них.

49. Доказать, что любой вектор однозначно выражается через базисные. (Коэффициенты этого разложения называются координатами данного вектора в данном базисе.)

50. Доказать, что $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ – базис в $\mathbb{R}^n$ (называемый стандартным).
Как найти координаты вектора в этом базисе?

51. Найти базис в пространстве тех векторов $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, у которых (1) $x_1 = 0$; (2) $x_2 = x_3 = 0$; (3) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

52. Что можно сказать о подпространствах $\mathbb{R}e_1, \ldots, \mathbb{R}e_n$ ($\mathbb{R}x$ – множество всех векторов, пропорциональных x), если $e_1 \ldots e_n$ – базис E ? (Ответ: $E = \mathbb{R}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}e_n$)

53. Доказать, что базис можно эквивалентно определить как (1) линейно независимую систему, становящуюся линейно зависимой при добавлении любого вектора; (2) систему, через которую выражается любой вектор, но которая теряет это свойство при изъятии любого вектора.

54. Доказать, что любую линейно независимую конечную систему векторов можно дополнить либо до базиса, либо до бесконечной линейно независимой системы и что любую конечную систему, через которую выражаются все вектора, можно сделать базисом, выкинув из нее некоторую часть. (Бесконечная система считается линейно независимой, если такова любая её конечная подсистема.)

Изоморфизмом линейных пространств E и F называется взаимно однозначное соответствие $\varphi: E \to F$, сохраняющее операции: $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$

55. Доказать, что E имеет базис из n элементов тогда и только тогда, когда оно изоморфно $\mathbb{R}^n$ (т.е. существует изоморфизм $\varphi: E \to \mathbb{R}^n$)

56. Пусть E является (внутренней) прямой суммой своих подпространств E_1 и E_2. Доказать, что оно изоморфно их внешней прямой сумме (пространству пар). Эта задача отчасти оправдывает двоякое применение термина "прямая сумма".

Нам потребуется следующий факт, доказательство которого мы отложим.

Основная лемма. Если $y_1 \ldots y_k$ линейно выражаются через $x_1 \ldots x_\ell$ и $k > \ell$, то $y_1 \ldots y_k$ линейно зависимы.

57. Доказать, что любые два базиса одного пространства имеют одинаковое количество векторов.

Пространство, имеющее (конечный) базис, называется конечномерным, а число векторов базиса (не зависящее от его выбора, см. предыдущую задачу) – размерностью пространства. Пространство, не имеющее конечного базиса, называется бесконечномерным. Размерность

пространства E обозначается $\dim E$. Как правило, мы будем иметь дело с конечномерными пространствами (не оговаривая этого явно, если это ясно из контекста).

58. Доказать, что пространство бесконечномерно тогда и только тогда, когда в нем есть бесконечная линейно независимая система.

59. Как устроены одномерные пространства?

60. Найти размерность пространства $\mathbb{R}^n$.

61. Доказать, что (1) если $x_1, \ldots, x_n$ – линейно независимые вектора E, то $n \leq \dim E$; (2) если любой вектор E выражается через $x_1 \ldots x_n$, то $n \geq \dim E$.

62. Можно ли определить размерность как максимальное число линейно независимых векторов? как минимальное число векторов, через которые выражается любой вектор?

63. Доказать, что в конечномерном пространстве любая система из $\dim E$ векторов, удовлетворяющая одному из условий в определении базиса, удовлетворяет и второму.

64. Существуют ли в $\mathbb{R}^2$ три независимых вектора? в $\mathbb{R}^3$ два вектора, через которые выражается любой?

65. Доказать, что изоморфные пространства имеют одинаковую размерность и, напротив, два пространства одной (конечной) размерности изоморфны.

66. Доказать, что если E – подпространство F, то $\dim E \leq \dim F$ В каких случаях возможно равенство?

67. Известно, что $E = E_1 \oplus E_2$, $\dim E_1 = n_1$, $\dim E_2 = n_2$. Найти $\dim E$.

68. Найти размерность подпространства $\mathbb{R}^n$, состоящего из векторов, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$ (a_i – заданные числа, не все равные нулю).

69. E и F – подпространства $\mathbb{R}^{10}$ размерности 7. Доказать, что они имеют общий ненулевой вектор.

70. Доказать, что для произвольных подпространств E_1 и E_2 пространства E справедливо соотношение

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

(Ср. формулу $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.)

71. Можно ли написать аналогичную формулу, выражающую $\dim(E_1 + E_2 + E_3)$ через размерности E_i и их пересечений?

72. Доказать, что всякое подпространство H конечномерного пространства E выделяется прямым слагаемым, т.е. найдется такое подпространство $F \subset E$, что $H \oplus F = E$.

73. Доказать утверждение задачи 72 для бесконечномерного E.

74. Чему равно $\dim (E/F)$, если $\dim E = n$, $\dim F = k$.

75. Может ли пространство быть представлено в виде конечного объединения своих подпространств меньшей размерности?

76. Доказать, что всякое подпространство $\mathbb{R}^n$ замкнуто.

77. Рассмотрим множество всех векторов, выражающихся через данный конечный набор векторов из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными коэффициентами (конус, натянутый на них). Можно ли утверждать, что оно замкнуто?

Доказательства основной леммы.

Напомним: Основная лемма утверждает, что если вектора $y_1 \dots y_k$ выражаются через $x_1 \dots x_\ell$ и $k > \ell$, то $y_1, \dots, y_k$ линейно зависимы. Сейчас мы предложим два доказательства этого факта (третье, использующее метод Гаусса решения систем линейных уравнений, см. далее). Первое проходит индукцией по ℓ.

78. Доказать Основную лемму при $\ell = 1$.

79. Провести шаг индукции. (Указание. Пусть $y_1 \dots y_k$ выражается через $x_1 \dots x_\ell$. Если в этих выражениях вектор x_1 не используется, то все сводится к меньшему ℓ. Пусть $y = a_1 x_1 + \dots + a_\ell x_\ell$, $a_1 \neq 0$. Тогда векторы $y_2 - c_2 y_1$, $y_3 - c_3 y_1$, ... при подходящих c_i выражаются через $x_2 \dots x_\ell$, линейно зависимы по предположению индукции, поэтому и игреки линейно зависимы.)

Вот набросок другого доказательства (восходящего к Штейницу). Пусть $y_1, \dots, y_k$ – линейно независимая система, выражающаяся через $x_1, \dots, x_\ell$. В выражении $y_1 = a_1 x_1 + \dots + a_\ell x_\ell$ один из коэффициентов не равен 0 (например, a_1). Тогда через $x_1, \dots, x_\ell$ выразимо то же, что через $y_1, x_2, \dots, x_\ell$. Рассмотрим выражение для y_2; в нем один из коэффициентах при иксах ненулевой (так как y_1 и y_2 линейно независимы), соответствующее x_i можно заменить на y_2 и т.д. В конце концов, если $k > \ell$, получится, что через некоторые ℓ игреков выражается то же самое, что и через иксы (что противоречит линейной независимости игреков).

80. Провести это рассуждение полностью.

Системы линейных уравнений

Системой линейных уравнений называется система вида $\longrightarrow$ $\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1} x_1 + \dots + a_{kn} x_n = b_k \end{cases}$

(x_i – неизвестные, a_{ij} – коэффициенты, b_j – правые части). Система называется однородной, если все правые части равны 0. Таблица из чисел a_{ij} (k строк, n столбцов) называется матрицей системы; добавив к ней справа столбец правых частей, получим расширенную матрицу системы.

С каждой матрицей из n столбцов и k строк сопоставим отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, определенное формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}$$

В этих терминах решения системы с данной матрицей и правой частью суть прообразы правой части при отображении, задачаемом матрицей.

81. Найти эквивалентные утверждения в разных колонках и дописать недостающие (A – матрица из n столбцов и k строк, b – вектор высоты k, φ – соответствующее отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$)

вектор b линейно выражается через столбцы матрицы A;	при любой правой части система с матрицей A имеет единственное решение;	$b \in \{$ образ $\varphi\}$
через столбцы матрицы A выражается любой вектор $\mathbb{R}^k$	система с матрицей A и правой частью b имеет решение;	φ – наложение
столбцы матрицы A линейно независимы	однородная система с матрицей A имеет только нулевое решение;	φ взаимно однозначно

82. Назовем элементарными преобразованиями перестановку строк матрицы и вычитание из i-ой строки j-ой, умноженной на произвольный коэффициент (при этом j-ая не меняется!). Доказать, что элементарные преобразования расширенной матрицы системы заменяют её на равносильную.

83. Назовем матрицу ступенчатой, если первый ненулевой элемент i-ой строки расположен правее первого ненулевого элемента j-ой строки при $i > j$. Доказать, что всякая матрица может быть приведена элементарными преобразованиями к ступенчатому виду.

84. В каком случае система со ступенчатой расширенной матрицей имеет решение?

85. Назовем столбцы, в которых стоят первые ненулевые элементы строк, главными. Доказать, что все решения системы со ступенчатой расширенной матрицей (если они есть) могут быть получены так: значения неизвестных, стоящих в неглавных столбцах, выбираются произвольно, после чего значения неизвестных в главных столбцах определяются однозначно.

86. Доказать, что всякая однородная система, в которой неизвестных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение.

87. Доказать, что любые n векторов в $\mathbb{R}^k$ при $n > k$ линейно зависимы. Доказать, что любые n векторов, линейно выражающиеся через k векторов при $n > k$, линейно зависимы. (Использовать предыдущую задачу.)

Мы получили еще одно доказательство Основной леммы.

88. Доказать, что если однородная система с квадратной матрицей и нулевой правой частью имеет лишь нулевое решение, то система с той

же матрицей и любой правой частью имеет решение.

На самом деле матрицы важны прежде всего как изображения линейных операторов.

Линейные операторы

Пусть E, F – линейные пространства. Отображение $A: E \to F$ называется линейным, если $A(x+y) = A(x) + A(y)$, $A(0) = 0$, $A(-x) = -A(x)$, $A(\lambda x) = \lambda \cdot A(x)$ $[x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}]$

89. Доказать, что отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, сопоставляемое с каждой матрицей из k строк и n столбцов, линейно. Доказать, что верно и обратное: любое линейное отображение соответствует некоторой матрице.

90. Движения плоскости задают линейные отображения векторов. Написать матрицу поворота. В каком случае матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ соответствует некоторому движению? (Ответ: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$.)

91. Для каких матриц размера 2 на 2 соответствующие им линейные операторы отображают множество всех точек с целыми координатами в себя? Когда это соответствие взаимно однозначно?

92. Доказать, что если $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ и $B: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ линейны, то их композиция $B \circ A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ линейна. Написать матрицу $B \circ A$, если $k = l = n = 2$ и известны компоненты матриц B и A. Матрица оператора BA называется произведением матриц операторов B и A. Сформулировать правило перемножения матриц произвольного размера.

93. Определим A^n как $A \cdot \ldots A$ (n раз). Найти A^n, если (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [В ответ войдут числа Фибоначчи]

Пусть $A: E \to F$ – линейный оператор. Его ядром $\ker A$ называется множество $\{x \in E \mid Ax = 0\}$, образом $\operatorname{im} A$ – множество $\{Ax \mid x \in E\}$

94. Доказать, что $\ker A$ и $\operatorname{im} A$ – подпространства, причем $(\ker A = \{0\}) \Leftrightarrow (A$ – вложение$)$.

95. Любые ли подпространства могут быть образами и ядрами линейных операторов?

96. Придумать естественное взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из E/F в H и линейными операторами из E в H, ядра которых содержат F.

97. Линейный оператор $A: E \to E$ называется нильпотентным, если $A^n = 0$ для некоторого n (тогда, очевидно, $A^k = 0$ при $k \geq n$). Доказать, что если A нильпотентен, то $A^{\dim E} = 0$.

98. Доказать, что если $A: E \to F$, $f_1, \ldots, f_k$ – базис в F, а $e_1 \ldots e_l$ – базис в $\ker A$, то $e_1, \ldots, e_l$ вместе с любыми прообразами $f_1 \ldots f_k$ образуют базис в E.

99. Доказать, что $\dim(\operatorname{im} A) + \dim(\ker A) = \dim E$ (E – пространство, на котором определен оператор A).

100. Установить изоморфизм между $\operatorname{im} A$ и $E/\ker A$ и вывести отсюда утверждение предыдущей задачи.

101. Найти размерность пространства всех многочленов степени не выше n , для которых $P(1) = P(2) + P(3) = 0$.

102. Доказать, что если E конечномерно, то для оператора $A : E \to E$ свойства быть вложением и наложением равносильны. Вывести отсюда утверждение задачи 88.

103. Справедливо ли утверждение предыдущей задачи, если бесконечномерно?

Как найти размерность?

Подпространство $E \subset \mathbb{R}^k$ может быть задано как множество решений системы линейных уравнений или как линейная оболочка конечного набора векторов в $\mathbb{R}^k$. Следующие задачи посвящены вычислению размерностей заданных таким образом подпространств.

104. Показать, что вычисление размерностей заданных таким образом подпространств сводится к вычислению размерностей ядра и образа оператор с заданной матрицей. (Как мы видели, достаточно найти одну из них.)

105. Доказать, что при элементарных преобразованиях матрицы размерности ядра и образа соответствующего оператора не меняются.

106. Как найти размерности ядра и образа оператора, если его матрица – ступенчатая?

107. Найти размерность линейной оболочки векторов в $\mathbb{R}^5$ с координатами (1,1,5,1,1), (0,2,4,2,1), (0,3,3,3,1), (0,4,2,4,1) и (0,5,1,6,2).

108. Найти размерность линейной оболочки векторов (1, a ,-1,2), (2,-1, a ,5), (1,10,-6,1) в зависимости от a .

109. Найти размерность пространства решений системы

$$x + 2y + 3z = 0,\quad ax + y + z = 0,\quad x + ay + 2z = 0$$

в зависимости от a .

Размерность образа оператора называется его рангом.

110. Доказать, что ранг оператора равен максимальному числу линейно независимых столбцов его матрицы.

111. Доказать, что ранг произведения операторов не превосходит ранга любого сомножителя.

112. Доказать, что следующие свойства равносильны: (1) оператор имеет ранг 1; (2) все столбцы его матрицы пропорциональны; (3) все строки его матрицы пропорциональны.

II3. Доказать, что любой оператор представим в виде суммы операторов ранга 1, причём наименьшее возможное количество слагаемых в этой сумме равно его рангу.

II4. Доказать, что ранг оператора равен размерности линейной оболочки его строк. Вывести отсюда утверждение задачи 43.

II5. Дать другое решение предыдущей задачи, используя тот факт, что при элементарных преобразованиях матрицы размерность линейной оболочки её строк сохраняется.

Пространство линейных операторов. Сопряженное пространство

II6. Пусть $e_1 \dots e_n$ – базис в E. Доказать, что всякий линейный оператор $A: E \to F$ однозначно определяется своими значениями на векторах e_i, причем они могут быть произвольными векторами F.

Пусть $A: E \to F$, $e_1 \dots e_n$ – базис в E, $f_1 \dots f_k$ – базис в F. Запишем координаты каждого из векторов $Ae_1, \dots, Ae_n$ в базисе $f_1 \dots f_k$ в виде столбца. Полученная таблица из k строк и n столбцов называется матрицей оператора A в данных базисах.

II7. Доказать, что при фиксированных базисах в E и F каждый оператор однозначно определяется своей матрицей (которая может быть произвольной). Как связано это определение с данным выше определением матрицы оператора $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$?

II8. Ввести на множестве $L(E, F)$ линейных операторов из E в F структуру векторного пространства и определить его размерность.

Линейные операторы из E в $\mathbb{R}$ называются линейными функционалами на E; пространство линейных функционалов называется сопряженным к E и обозначается E^*.

II9. Какие подпространства могут быть ядрами линейных функционалов? Что можно сказать о двух функционалах, если их ядра равны?

I20. Указать базис в E^*, если задан базис в E, и найти размерность E^*.

I2I. Установить изоморфизм между конечномерным пространством E и вторым сопряженным $(E^*)^*$ (не фиксируя базис в E!). Существенна ли конечномерность?

I22. Пусть $f_1, \dots, f_n, g \in E^*$. Доказать, что ($g$ линейно выражается через $f_1 \dots f_n$) $\Leftrightarrow \ker g \supset (\ker f_1 \cap \dots \cap \ker f_n)$.

I23. Пусть E – пространство векторов на плоскости. Установить изоморфзим между E и E^*, используя скалярное произведение векторов.

I24. Пусть $F \subset E$ – подпространство. Рассмотрим множество тех функционалов из E^*, которые равны 0 на F. Доказать, что это – подпространство и найти его размерность.

I25. Доказать, что всякое подпространство конечномерного пространства E может быть представлено в виде пересечения нескольких подпространств размерности $\dim E - 1$ (такие подпространства называют гиперплоскостями). Каково минимально возможное число таких гиперплоскостей?

I26. Система векторов $x_1 \ldots x_n$ такова, что ни один функционал не обращается в 0 на всех них одновременно. Доказать, что из нее можно выбрать базис.

I27. Доказать, что множество обратимых операторов открыто в $L(E, E)$ (в какой-нибудь естественной метрике).

I28. Доказать, что при каждом k множество операторов из $L(E, F)$, ранг которых не превосходит k, замкнуто в $L(E, F)$.

Линейная алгебра в действии

I29. Электрическая цепь состоит из клемм, некоторые пары которых соединены сопротивлениями. На некоторых клеммах поддерживается произвольно заданное напряжение (они подключены к источнику питания). Доказать, что распределение напряжений на остальных клеммах, согласованное с законом Ома и требованием "сумма токов, втекающих в клемму, не соединенную с источником питания, равна 0", существует и единственно. (Предполагается, что цепь связна, т.е. её нельзя разбить на не соединенные друг с другом группы.)

I30. В граничные клетки прямоугольной таблицы записывают произвольные числа. Доказать, что можно так заполнить внутренние клетки, чтобы каждое число равнялось среднему арифметическому четырех соседей.

I3I. На окружности записано n чисел. Между каждыми двумя из них пишут их сумму, а исходные числа стирают. Любой ли набор чисел может получиться? (Указание. Ответ зависит от n.)

I32. Задача интерполяции состоит в отыскании многочлена степени $< n$, принимающего заданные значения в n точках. Мы доказали, что (I) решение всегда существует и что (2) оно единственно. С помощью линейной алгебры можно вывести (I) из (2) и наоборот. Как?

I33. Рассмотрим пространство последовательностей x, у которых $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ при всех n. Найти его размерность. Указать базис из геометрических прогрессий. Указать формулу для n-го члена последовательности Фибоначчи (у которой $x_1 = x_2 = 1$)

I34. Сделать то же для последовательностей, у которых $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

I35. (Линейная алгебра и программирование.) Как вычислить n-ый член последовательности Фибоначчи, сделав не более $C \log_2 n$ арифметических операций (над целыми числами)?

Пусть E – линейное пространство. Говорят, что функция $\langle x, y\rangle \mapsto (x, y)$ из E E в R называется скалярным произведением, если выполнены такие свойства:

(1) $(x, y) = (y, x)$ (симметрия)

(2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ (билинейность)
$(\lambda x, y) = (x, \lambda y) = \lambda(x, y)$

(3) $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ (положительная определенность)

Пространство, снабженное скалярным произведением, называется евклидовым.

1. Известные из курса школьной геометрии скалярные произведения обладают этими свойствами. Существуют ли другие скалярные произведения на плоскости и в пространстве ?

Векторы x и y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. (Запись: $x \perp y$.)

2. Известно, что вектор $x \in E$ ортогонален любому вектору пространства E. Что это за вектор ?

3. Доказать, что множество $x^\perp$ векторов, ортогональных данному вектору x, является подпространством. Доказать, что всякий вектор y из E однозначно представляется в виде суммы $y_1 + y_2$, где y_1 пропорционален x, а y_2 ортогонален x. (Векторы y_1 и y_2 можно назвать проекциями y на x и $x^\perp$.)

Нормой, или длиной, вектора x называется число $\sqrt{(x, x)}$. Обозначение: $\| x \|$.

4. Доказать, что $|(x, y)| = \|x\| \cdot \|$проекция y на x$\|$

5. Доказать теорему Пифагора: если $x \perp y$, то
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

6. Доказать, что $\|$ проекция y на x $\| \leq \|y\|$
Указание: катет короче гипотенузы.

7. Доказать неравенство Коши – Буняковского – Шварца:
$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Поскольку $|(x, y)| / (\|x\| \cdot \|y\|) \leq 1$, эту величину называют косинусом угла между векторами x и y (а углом считают ее арккосинус).

8. Пусть x, y – произвольные векторы. Квадратный трехчлен $t \mapsto (x + ty, x + ty)$ неотрицателен, и его дискриминант неотрицателен. Вывести отсюда неравенство предыдущей задачи.

9. Доказать неравенство треугольника $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

10. Доказать равенство параллелограмма:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

11. Доказать теорему о 2 перпендикулярах: если вектор x перпендикулярен двум непропорциональным векторам y и z, лежащим в двумерной плоскости, то он перпендикулярен всем векторам этой плоскости.

12. Сформулировать и доказать теорему о 3 перпендикулярах из школьного курса геометрии в терминах евклидовых пространств.

13. (1) В евклидовом пространстве даны три вектора x, y, z единичной длины. Доказать, что $(x, y) + (y, z) + (x, z) \geq -3/2$. (2) Доказать, что если $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geq -3/2$. (3) Доказать, что сумма косинусов углов треугольника не превосходит 3/2.

14. Доказать, что сумма косинусов двугранных углов при всех ребрах тетраэдра не превосходит 2.

15. Векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ попарно ортогональны. Доказать, что они линейно независимы.

16. Рассмотрев в пространстве $C[0, 2\pi]$ непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций скадярное произведение $(f, g) = \int_0^{2\pi} fg$, доказать линейную независимость системы функций 1, cos x, cos 2x,..., cos nx, sin x,..., sin nx.

Базис, составленный из ортогональных векторов единичной длины, называется ортонормированным.

17. Доказать, что любое конечномерное пространство имеет ортонормированный базис и, более того, любой вектор единичной длины может быть дополнен до ортонормированного базиса.

Пусть L - подпространство евклидова пространства E, x - вектор из E. Вектор l из L называется (ортогональной) проекцией x на L, если x - l ортогонально L (ортогонально всем векторам из L).

18. Доказать, что если L - конечномерное подпространство евклидова пространства E, то всякий вектор из E имеет единственную проекцию на L. (Указание. Каковы координаты проекции в ортонормированном базисе в L ?)

19. Существенна ли конечномерность в предыдущей задаче?

20. Доказать, что проекция x на L - ближайшая к x точка подпространства L. (Расстоянием между x и y считаем $\|x - y\|$.)

21. Пусть S - произвольное множество векторов конечномерного евклидова пространства. Доказать, что множество $S^\perp$ векторов, ортогональных всем векторам S, есть подпространство; если S - подпространство, то $E = S \oplus S^\perp$, а $(S^\perp)^\perp = S$.

22. Доказать, что любые два евклидовых пространства E_1 и E_2 одинаковой конечной размерности изоморфны, т.е. существует такой изоморфизм линейных пространств $\varphi: E_1 \to E_2$, что $(\varphi(x), \varphi(y))_{E_2} = (x, y)_{E_1}$ для всех x, y из E_1.

23. (Ортогонализация Грама - Шмидта.) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - произвольный базис евклидова пространства. Доказать, что существует ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$ того же пространства, для которого линейные оболочки $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_k$ совпадают при всех $k = 1..n$.

24. Доказать, что для всякого линейного функционала φ на конечномерном евклидовом пространстве E найдется такой вектор f, что $\varphi(x) = (x, f)$ для всех $x \in E$. Указать изоморфизм между конечномерным евклидовым пространством и сопряженным к нему.

25. (Метод наименьших квадратов.) Дано n точек плоскости $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Нужно провести прямую $y = kx$ как можно ближе к этим точкам - так, чтобы сумма $\sum (y_i - kx_i)^2$ была бы минимальной. Доказать, что эта задача всегда имеет ровно одно решение. Какое? Тот же вопрос, если нужно провести прямую $y = kx + b$ так, чтобы $\sum (y_i - (kx_i + b))^2$ была бы минимальной.

26. Доказать, что многочлены Чебышёва $P_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ортогональны в пространстве непрерывных на $[-1, 1]$ функций со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x) / \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

27. Любые 2 из n векторов евклидова пространства образуют тупой угол (их скалярное произведение меньше 0). Доказать, что после отбрасывания любого вектора получаем линейно независимую систему.

28. Нормой в линейном пространстве называется неотрицательная функция $x \mapsto \|x\|$, для которой $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Доказать, что если норма такова, что выполнено равенство параллелограмма (см. задачу 10), то существует скалярное произведение на E, при котором $\|x\|^2 = (x, x)$.

29. Назовем тригонометрическим многочленом степени n функцию $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$

Доказать, что для любой непрерывной на $[0, 2\pi]$ функции наиболее близкий к ней тригонометрический многочлен степени n можно найти, положив

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx$$

(Расстояние между f и g измеряется величиной $\int_0^{2\pi} |f - g|^2$)

Числа a_k, b_k, определяемые этими формулами, называются коэффициентами Фурье функции f, а ряд $\sum a_k \cos kx + \sum b_k \sin kx$ - её рядом Фурье.

30. Доказать, что если a_k, b_k - коэффициенты Фурье функции f, то $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \le \int_0^{2\pi} |f|^2$ (неравенство Бесселя).

31. Доказать, что при $n \to \infty$ левая часть неравенства Бесселя стремится к правой (равенство Парсеваля).

СКОЛЬКО ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ ?

I. На кружок пришли школьники из n различных школ. Из каждой школы было ровно n человек: один первоклассник, один второклассник,..., один n-классник. Можно ли всех выстроить в квадрат $n \times n$ так, чтобы ни в одном ряду и ни в одной колонне не оказалось двух ребят из одной школы или из одинаковых классов, если (а) $n = 3$; (б) $n = 5$; (в) $n = 4$; (г)* $n = 6$?

Определение. Пусть в множестве Π (элементы которого мы будем называть точками) выделены некоторые подмножества (мы будем называть их прямыми) так, что выполнены следующие свойства (аксиомы):

АП1. В множестве Π существуют 3 точки, не принадлежащие одной прямой.

АП2. Для любых двух различных точек Π существует ровно одна прямая, которая их содержит.

АП3. Для любой прямой ℓ и любой точки A существует ровно одна прямая, которая содержит A и параллельна ℓ (параллельными называются совпадающие или не пересекающиеся прямые).

В таком случае множество Π называется (аффинной) плоскостью.

2. Доказать, что на плоскости не менее 4 точек.

3. Привести пример плоскости из 4 точек.

4. Может ли плоскость иметь ровно (а) 5; (б) 7; (в) 9 точек?

5. Может ли на одной прямой плоскости быть 4 точки, а на другой – 5 точек?

6. Докажите, что на любых двух прямых плоскости одинаковое число точек.

7. Пусть на прямой n точек. (а) Сколько точек на плоскости? (б) Сколько на этой плоскости прямых?

8. Придумать плоскость, прямая на которой содержит (а) 3 точки; (б) 5 точек; (в) 4 точки; (г)* p точек (p – простое).

9.* Может ли прямая на плоскости содержать (а) 6; (б) 9 точек?

IO. (Проективная плоскость.) Система линий метро в городе Великий Гусляр устроена так, что с любой станции на любую можно проехать без пересадки, а любые две линии имеют ровно одну общую станцию, и линий не менее двух. Доказать, что (а) станций не меньше 7; (б) если закрыть все станции одной линии, то получится аффинная плоскость (как?); (в) число станций равно числу линий; (г) найти число станций, если на линии n станций.

II. Какое наибольшее число клеток в квадрате (а) 7 на 7; (б) I3 на I3 можно закрасить так, чтобы никакие 4 закрашенные клетки не оказались в углах прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата?

А н а л и з I 7 в е к а ,

или

Математические методы школьной механики

I. Производная, мгновенная скорость, касательная

2. Учимся дифференцировать

3. Зачем нужно дифференцировать?

4. Интегрирование

5. Интеграл в физике

...Исчисление бесконечно малых... было почти полностью создано в течение одного столетия, и вот уже около трёх веков постоянного применения не смогли притупить этот ни с чем не сравнимый инструмент.

Н.Бурбаки

Введение

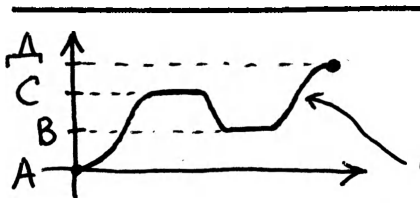
История развития математического анализа ("исчисления бесконечно малых") весьма своеобразна. Его основатели И.Ньютон (1643 - 1727) и Г.Лейбниц (1646 - 1716) жили в 17 - 18 веках, и к 19 веку здание математического анализа было уже весьма обширно. Однако лишь в 19 веке оно было снабжено прочным фундаментом. (Построение этого фундамента прежде всего связано с именем французского математика О.Коши (1789 - 1857).)

Обычно при изучении анализа начинают как раз с этого фундамента (теории действительных чисел, пределов и т.п.). Без него, конечно, не обойтись. Однако мы, следуя истории, начнем с изложения анализа в духе 17 века, отложив заботу о строгости на более позднее время. Если угодно, все нижеследующее можно воспринимать как часть курса физики.

1. Производная, мгновенная скорость, касательная.

А. Мировые линии.

Пусть точка движется по прямой, $x(t)$ - её координата в момент времени t. Это движение удобно изображать, рисуя график функции $t \mapsto x(t)$.



Автобус выезжает из А, останавливается в С, поворачивает обратно, стоит в В и наконец приезжает в Д.

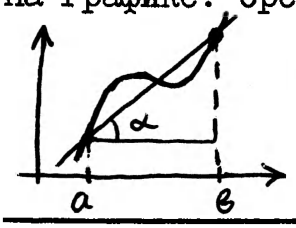
"мировая линия автобуса"

Часто такое изображение удобно.

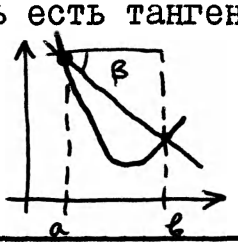
Б. Средняя скорость.

Пусть точка движется по прямой, $x(t)$ - её координата в момент t. Средней скоростью на отрезке $[a, b]$ называется отношение $(x(b) - x(a)) / (b - a)$

На графике: средняя скорость есть тангенс угла наклона секущей



средняя скорость $= \operatorname{tg}\alpha$



средняя скорость $= -\operatorname{tg}\beta$

Равномерное движение со скоростью v – такое движение, что на любом отрезке средняя скорость равна v. Записав $(x(t)-x(0))/(t-0)=v$, получим: $\boxed{x(t)=x(0)+vt}$
Нетрудно проверить, что при движении по этой формуле средняя скорость действительно равна v.

В. Мгновенная скорость.

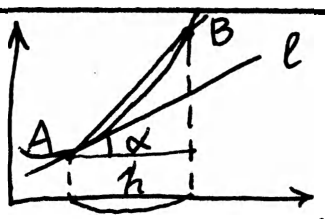
Пусть t – некоторый момент времени. Рассмотрим среднюю скорость на отрезке $[t, t+h]$. Она зависит от h. Будем уменьшать отрезок, приближая h к 0. Если при этом средняя скорость приближается к какому-то числу v, то это v называется мгновенной скоростью в момент t.

$\boxed{\text{мгновенная скорость в момент } t = \text{предел } \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \text{ при } h\to 0}$

Пример. Движение происходит по формуле $x(t)=t^2$. Найти мгновенную скорость в момент 1.

Решение. $(x(1+h)-x(1))/h = ((1+h)^2-1)/h = 2+h$; при малых h это близко к 2. Ответ: 2.

На рисунке: при $h\to 0$ секущая AB приближается к "касательной" l, а её угол наклона – к углу наклона α касательной. Поэтому:



мгновенная скорость = тангенс угла наклона касательной

Г. Производная.

Всё сказанное о функции x можно, разумеется, отнести к произвольной функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Приходим к такому определению:

Пусть f – функция с действительными аргументами и значениями.

$\boxed{\text{Производной функции } f \text{ в точке } a \text{ называется предел } [f(a+h)-f(a)]/h \text{ при } h\to 0. \text{ Он обозначается } f'(a).}$

Таким образом, можно сказать, что мгновенная скорость есть производная координаты.

Функция $a \mapsto f'(a)$ называется производной функцией.

Д. Формула $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h$.

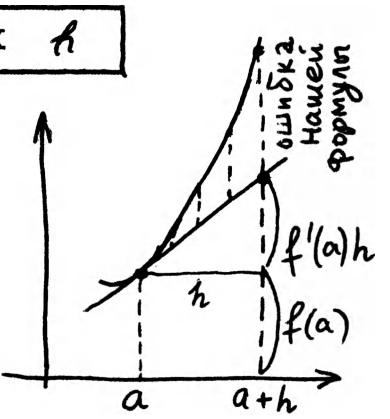
Согласно определению, имеет место приближенное равенство $f'(a) \approx [f(a+h) - f(a)] / h$ (тем более точное, чем меньше h). Другими словами

$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h$ при малых h

Можно, однако, записать и более простую приближенную формулу: $f(a+h) \approx f(a)$ при малых h. Чем наша формула лучше? Она более точна! В самом деле,

$[f(a+h) - f(a)] / h = f'(a) + (\text{малое})$;

$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + (\text{малое}) \cdot h$



Таким образом, погрешность нашей формулы не просто мала при малых h (как для формулы $f(a+h) \approx f(a)$), но мала по сравнению с h, составляет малую долю h. Это записывается так: $f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + o(h)$ где $o(h)$ означает "малое по сравнению с h". (Сравните с $f(a+h) = f(a) + o(1)$ – здесь ошибка мала по сравнению с 1.)

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[2]{1.001}$.

Решение. При $f(x) = x^2$ имеем $(1+h)^2 = f(1+h) \approx f(1) + f'(1)\,h = 1 + 2h$. Поэтому если $(1+h)^2 = 1.001$, то $1+2h \approx 1.001$, откуда $h \approx 0.0005$. Ответ. $\sqrt{1.001} \approx 1.0005$

Наша формула может быть принята за определение:

число C – производная функции f в точке a, если $f(a+h) = f(a) + Ch + o(h)$

В самом деле, если это так, то $[f(a+h) - f(a)] = C + o(h)/h$, а $o(h)/h \to 0$ по определению символа $o(h)$.

2. Учимся дифференцировать

Дифференцирование – нахождение производной. Мы продемонстрируем некоторые приемы дифференцирования на примерах.

А. Пусть f – константа: $f(x)=C$ для всех x. Тогда $[f(a+h)-f(a)]/h = 0$ и $f'(a)=0$ для всех a.

Б. Пусть $f(x)=x$. Тогда $[f(a+h)-f(a)]/h=1$ и $f'(a)=1$ для любого a.

В. Пусть $f(x)=x^2$ (Мы уже дифференцировали эту функцию в точке 1.) Имеем: $[f(a+h)-f(a)]/h = [(a+h)^2-a^2]/h = 2a+h \to 2a$ (при $h \to 0$). Поэтому $f'(a)=2a$.

Другой способ: $f(a+h)=(a+h)^2=\underbrace{a^2}_{f(a)}+\underbrace{(2a)\cdot h}_{f'(a)}+\underbrace{h^2}_{o(h)}$

Г. Пусть $f(x)=x^3$.

(I способ) $f(a+h)=(a+h)(a+h)(a+h)=\underbrace{a^3}_{f(a)}+\underbrace{3a^2h}_{f'(a)}+\underbrace{(\text{нечто})h^2}_{o(h)}$

Ответ: $f'(a)=3a^2$

(2 способ) Мы пользуемся тождеством $(y-x)(y^2+xy+x^2)=y^3-x^3$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^3-a^3}{(a+h)-a}=a^2+a(a+h)+(a+h)^2 \to 3a^2.$$

(3 способ) Знак приближенного равенства означает, что мы пренебрегаем членами, имеющими величину $o(h)$ (малыми по сравнению с h). $f(a+h)=(a+h)^2(a+h)\approx(a^2+2ah)(a+h)\approx a^3+2a^2h+a^2h+2ah^2\approx a^3+3a^2h$. Поэтому $f'(a)=3a^2$.

Д. Функция $f(x)=x^n$.

(I способ) $f(a+h)=(a+h)\ldots(a+h)=\underbrace{a^n}_{f(a)}+\underbrace{na^{n-1}h}_{f'(a)}+\underbrace{(\text{нечто})h^2}_{o(h)}$.

Ответ: $f'(a)=na^{n-1}$.

(2 способ) Применим тождество $(y^n-x^n)/(y-x)=x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1}$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^n-a^n}{(a+h)-a}=(a+h)^{n-1}+(a+h)^{n-2}a+\ldots+a^{n-1}\to na^{n-1}.$$

(3 способ) Докажем, что если $f(x)=x^n$, то $f'(a)=na^{n-1}$ индукцией по n (т.е. сначала для $n=1$, потом для $n=2$ и т.д.) Пусть для $n=k-1$ это уже доказано. Пусть $f(x)=x^k$ Тогда $f(a+h)=(a+h)^k=(a+h)^{k-1}(a+h)\approx[a^{k-1}+(k-1)a^{k-2}h](a+h)\approx a^k+(k-1+1)a^{k-1}h$, что и требовалось.

Покажем, как дифференцировать функции, полученные из других с помощью сложения и умножения на число.

Е. Умножение на число. Пусть $f(x)=Cg(x)$ при всех x. (C – некоторое число). Тогда $f(a+h)=Cg(a+h)\approx C(g(a)+g'(a)h)=\underbrace{Cg(a)}_{f(a)}+\underbrace{Cg'(a)h}_{f'(a)}$. Отсюда $f'(a)=Cg'(a)$.

Другой способ: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = C\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \to C\cdot g'(a)$.

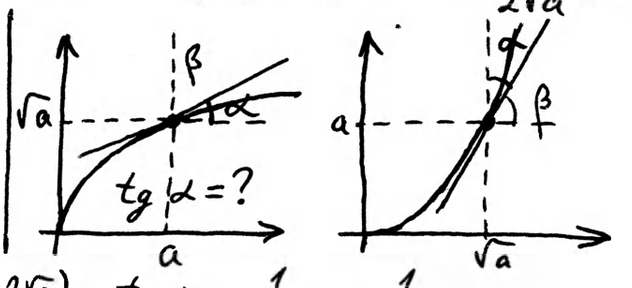
Ж. Сумма. Пусть $f(x) = g(x)+k(x)$. Тогда $f(a+h) = g(a+h) + k(a+h) \approx \underbrace{g(a) + k(a)}_{f(a)} + \underbrace{(g'(a) + k'(a))h}_{f'(a)}$
Отсюда $f'(a) = g'(a)+k'(a)$.

Теперь мы знаем достаточно, чтобы продифференцировать любой многочлен: согласно Ж, достаточно продифференцировать отдельно каждое слагаемое с помощью Д и Е.

З. Пример. Пусть $f(x) = x^3+2x^2+2x+1$ Найдем . Дифференцируя функции $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x$, $x \mapsto 1$ и складывая их производные с соответствующими коэффициентами, находим: $f'(a) = 3a^2 + 2\cdot 2a + 2\cdot 1 + 0 = 3a^2+4a+2$.

И. Пусть $f(x) = 1/x$. Найдем $f'(a)$.
(I способ, "физический"). Если $f(x) = x^n$, то $f'(x) = nx^{n-1}$; подставляя (незаконно!) $n = -1$, имеем $f'(a) = (-1)\cdot a^{-2} = -1/a^2$.
(2 способ) $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a(a+h)} \to -\frac{1}{a^2}$

К. Какие еще функции мы знаем? По существу только одну: извлечение корня. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Найдем $f'(a)$.
(I способ) $[f(a+h)-f(a)]/h = [\sqrt{a+h} - \sqrt{a}]/h =$
$\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h\cdot(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{(a+h)-a}{h}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \to \frac{1}{2\sqrt{a}}$.
(2 способ, "физический") Мы доказали, что если $f(x) = x^n$, то $f'(a) = na^{n-1}$. Подставим (незаконно!) $n = 1/2$.
(3 способ) Пусть $\sqrt{a+h} \approx \sqrt{a} + Ch$; возводя в квадрат, имеем: $a+h \approx a + 2C\sqrt{a}h$, откуда $2C\sqrt{a} = 1$, $C = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.
(4 способ)
Посмотрим на рисунок с графиком корня с другой стороны бумаги и увидим график функции $t \mapsto t^2$, про которую мы всё знаем: $tg\,\beta = 2\sqrt{a}$ (производная $t \mapsto t^2$ в $\sqrt{a}$ равна $2\sqrt{a}$), $tg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\beta} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.



Приведем теперь несколько более сложных правил для отыскания производной.

Л. Производная произведения. Пусть $f(x) = g(x)\cdot k(x)$. Тогда $f'(a) = g'(a)k(a) + g(a)k'(a)$. В самом деле, $f(a+h) = g(a+h)k(a+h) \approx [g(a)+g'(a)h]\cdot[k(a)+k'(a)h] \approx g(a)k(a) + [g'(a)k(a) + g(a)k'(a)]h$ (член с h^2, как всегда выбрасываем: он мал по сравнению с h).

С помощью этого правила можно заново найти производную

функции $g(x) = 1/x$. В самом деле, пусть $k(x) = x$; тогда $f(x) = g(x) \cdot k(x) = 1$. Применяя правило, получаем, что

$$0 = f'(a) = g'(a)\,k(a) + g(a)\,k'(a) = g'(a) \cdot a + \frac{1}{a} \cdot 1,$$

откуда $g'(a) = -1/a^2$.

М. Производная функции $1/g$. Пусть $f(x) = 1/g(x)$.

(I способ) Если $f(x) = 1/g(x)$, то $f(x)\,g(x) = 1$. Согласно правилу дифференцирования произведения, $0 = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$, откуда $f'(a) = -f(a)\,g'(a)/g(a) = -g'(a)/(g(a))^2$.

(2 способ) Пусть $f(x) = 1/g(x)$. Тогда

$$f(a+h) = 1/g(a+h) \approx 1/(g(a) + g'(a)\,h)$$

Производную для функции $t \mapsto 1/t$ мы знаем; используя это, можно написать: $\frac{1}{c+q} \approx \frac{1}{c} + \left(-\frac{1}{c^2}\right) q$ при малых q; при $C = g(a)$ и $q = g'(a)\,h$ (что действительно мало!) имеем

$$f(a+h) \approx (1/g(a)) + (-1/(g(a))^2) \cdot g'(a)\,h =$$
$$= f(a) + [-g'(a)/(g(a))^2]\,h.$$ Отсюда $f'(a) = -g'(a)/(g(a))^2$.

Н. Производная частного. Если $f(x) = g(x)/k(x)$, то

$$f'(a) = \frac{k(a)\,g'(a) - k'(a)\,g(a)}{(k(a))^2}.$$

Эта формула получается комбинацией двух предыдущих: представим $f(x)$ как $g(x) \cdot [1/k(x)]$

О. Производная композиции. Пусть $f = g \circ k$, то есть $f(x) = g(k(x))$ Тогда $f(a+h) = g(k(a+h)) \approx g(k(a) + k'(a)\,h)$. Воспользуемся формулой $g(c+q) \approx g(c) + g'(c) \cdot q$ при $C = k(a)$, $q = k'(a)\,h$. Получим

$$f(a+h) = \ldots \approx g(k(a)) + g'(k(a)) \cdot k'(a)\,h.$$

Отсюда $f'(a) = g'(k(a)) \cdot k'(a)$.

П. Пример. Пусть $f(x) = \sqrt{x^3+5}$. Тогда $f(x) = g(k(x))$, где $k(x) = x^3 + 5$, $g(t) = \sqrt{t}$. По формуле для производной композиции

$$f'(a) = g'(k(a)) \cdot k'(a) = \frac{1}{2\sqrt{k(a)}} \cdot k'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a^3+5}} \cdot (3a^2).$$

Последовательно применяя наши правила, можно продифференцировать практически любую функцию, заданную формулой.

3. Зачем нужно дифференцировать?

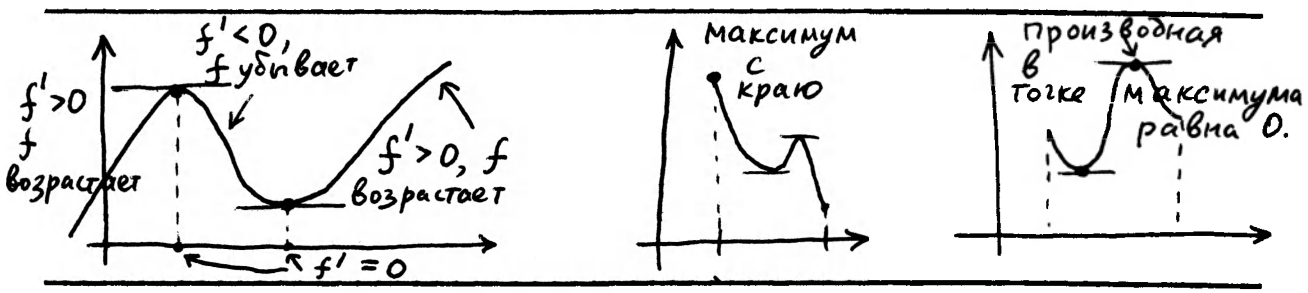
А. Основные правила.

Производную можно использовать для отыскания максимумов и минимумов, а также для диагностики возрастания и убывания функций. Это делается с помощью следующих правил:

Правило I. Функция f возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда её производная в каждой точке этого отрезка неотрицательна (соответственно неположительна). (Напомним: возрастание функции f означает, что из $x < y$ следует $f(x) \leq f(y)$.)

Правило 2. Если f' положительна (отрицательна) на отрезке $[a, b]$, то функция f строго возрастает (соответственно убывает) на нем (т.е. из $x < y$ следует $f(x) < f(y)$).

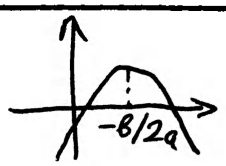
Правило 3. Пусть функция f на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее значение в точке $c \in [a, b]$: $f(c) \geq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда либо $f'(c) = 0$, либо c – один из концов отрезка. (*Аналогично для наименьшего значения.*)



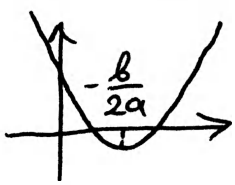
Поскольку мы сейчас изображаем из себя физиков, то правила I – 3 сформулированы не точно, и их истинный (смысл) можно понять лишь наблюдая за тем, как опытные люди их применяют. Поэтому приведем несколько примеров.

Б. Исследование квадратного трехчлена.
Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $f'(x) = 2ax + b$. Видно, что $f'(x) = 0$ при $x = -\frac{b}{2a}$; если $a > 0$, то f' в этой точке меняет знак с – (слева) на + (справа), если $a < 0$, то наоборот. Согласно нашим правилам, получаем:

при $a < 0$: f строго возрастает на $]-\infty, -b/2a[$
строго убывает на $]-b/2a, +\infty[$
в $-b/2a$ – максимум



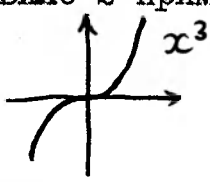
при $a > 0$: f строго убывает на $]-\infty, -b/2a[$
строго возрастает на $]-b/2a, +\infty[$
в $-b/2a$ – минимум



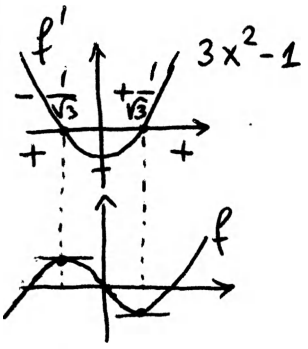
Это полностью согласуется с результатами, которые можно получить обычным способом (выделяя полный квадрат).

В. Многочлены третьей степени.

Проанализируем с помощью наших правил функцию $f(x)=x^3$. Её производная в точке x равна $3x^2$ т.е. всюду неотрицательна и равна 0 в точке 0. Следовательно, функция f возрастающая. Будет ли она строго возрастающей? Правило 2 применить нельзя, так как $f'(0)=0$. Но тем не менее это так. Чтобы убедиться в этом, применим правило 2 отдельно к промежуткам $]-\infty,0]$ и $[0,+\infty[$; наша функция строго возрастает на обоих промежутках, а значит, и всюду.



Еще один пример исследования многочлена 3-ей степени: $f(x)=x^3-x$. Дифференцируем: $f'(x)=3x^2-1$. Таким образом, на $]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ и $[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty[$ наша функция (f) возрастает, а на $[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$ - убывает.



Пусть нам теперь нужно найти наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[-1,2]$. Согласно правилу 3, их нужно искать среди концов отрезка и точек, где $f'=0$. Так как $f(-1)=0$, $f(-1/\sqrt{3})=2/3\sqrt{3}$, $f(1/\sqrt{3})=-2/3\sqrt{3}$ и $f(2)=7$, находим, что наибольшее значение равно 7 (в точке 2), а наименьшее равно $-2/3\sqrt{3}$ (в точке $1/\sqrt{3}$).

Г. Применения производной к отысканию максимумов, минимумов и доказательству неравенств.

Пример 1. Какое наибольшее значение может принимать xy, если $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y=C$?

Решение. Нужно найти максимум функции $f: x\mapsto x(C-x)$ на отрезке $[0,C]$. Дифференцируя, находим, что $f'(x)=C-2x$ и функция возрастает на $[0,C/2]$ и убывает на $[C/2,C]$ Максимум - в $C/2$, он равен $C^2/4$.

Впрочем, здесь мы имеем дело с квадратным трехчленом, так что дифференцирования можно было избежать. Эта задача по существу состоит в доказательстве неравенства $xy\leq\frac{1}{4}(x+y)^2$, извлекая корень, получаем $\sqrt{xy}\leq(x+y)/2$ (неравенство о среднем арифметическом и геометрическом).

Пример 2. Какое наименьшее значение может иметь $x+y$, если $x\geq 0$, $y\geq 0$, $xy=1$?

Решение. Здесь речь идет о минимуме функции $f: x\mapsto x+\frac{1}{x}$ при $x>0$. Дифференцируя ($f'(x)=1-1/x^2$), убеждаемся,

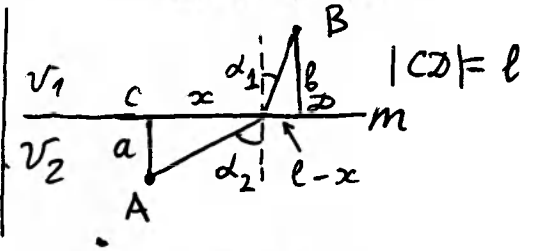
что на $]0, 1]$ она убывает, а на $[1, +\infty[$ возрастает. Следовательно, минимум достигается в 1 и равен 2.

Мы доказали неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (при $x > 0$); впрочем, оно следует из неравенства о среднем арифметическом и геометрическом.

Пример 3. Какое наименьшее значение принимает $x + y$, если $x^2 \cdot y = 1$, $x, y > 0$?

Решение. Дифференцируя функцию $f: x \mapsto x + \frac{1}{x^2}$, находим, что $f'(x) = 1 - 2/x^3$, минимум – в точке $\sqrt[3]{2}$ и равен $\sqrt[3]{2} + 1/\sqrt[3]{4}$. Эту задачу, впрочем, тоже можно свести к неравенству о среднем арифметическом и геометрическом с помощью искусственного приёма: условие $x^2 y = 1$ перепишем как $(x/2)(x/2)y = 1/4$; так как $\sqrt[3]{(x/2)(x/2)y} \leq (x/2 + x/2 + y)/3$, то $x/2 + x/2 + y \geq 3/\sqrt[3]{4}$ (что равно $\sqrt[3]{2} + 1/\sqrt[3]{4}$, как легко проверить).

Пример 4 (закон Снеллиуса) Найти самый быстрый путь из A в B, если скорость сверху от прямой m равна v_1, а снизу – v_2.



Решение. Введя обозначения, указанные на рисунке, запишем время: $t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_2 + \sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}/v_1$

Чтобы найти оптимальный путь, приравняем производную функции t нулю (правило 3):

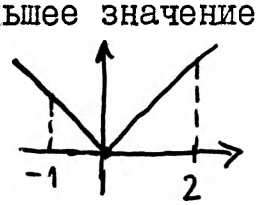
$$0 = t'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \frac{1}{v_2} + \frac{-2(\ell - x)}{2\sqrt{b^2+(\ell-x)^2}} \cdot \frac{1}{v_1}$$

Так как $x/\sqrt{a^2+x^2} = \sin \alpha_2$, а $(\ell - x)/\sqrt{b^2+(\ell-x)^2} = \sin \alpha_1$, получаем равенство, называемое "законом Снеллиуса", определяющее быстрейший путь: $\boxed{\sin \alpha_1 / v_1 = \sin \alpha_2 / v_2}$

(Снеллиус открыл его при изучении преломления света, который движется по быстрейшему пути.)

Д. Опасности.

Найдем минимум функции $f: x \mapsto |x|$ на отрезке $[-1, 2]$. Для этого продифференцируем её: при $x \geq 0$ имеем $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, при $x \leq 0$ имеем $f(x) = -x$, $f'(x) = -1$. Поэтому производная в нуль не обращается и для отыскания минимума нужно сравнить значения на концах отрезка: $f(-1) = 1$, $f(2) = 2$. Ответ: наименьшее значение равно 1 и достигается в точке -1.



Этот ответ, конечно, нелеп: на самом деле минимум в точке 0 и равен 0. В чем же дело?

Дело в том, что наша функция в точке 0 **не имеет** производной! Выражение $[f(0+h)-f(0)]/h$ равно + I при $h>0$ и - I при $h<0$ и предела при $h\to 0$ нет!

Мораль: при отыскании максимумов и минимумов нужно исследовать не только концы и точки, где производная равна 0, но и точки, в которых производной нет!

4. Интегрирование

Мы научились, зная зависимость координаты от времени, определять скорость. Теперь поставим обратную задачу. Пусть мы знаем скорость в любой момент времени; как определить координату?

Эта постановка задачи нуждается в небольшом уточнении. Зная только скорость, мы не можем определить координату: движение могло начаться в любой точке. Можно определить лишь **изменение** координаты за какой-то промежуток времени. Это мы и постараемся сделать.

А. Равномерное и равноускоренное движения.

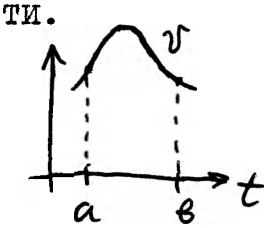
Пусть скорость постоянна и равна v. Нетрудно догадаться, что в этом случае изменение координаты за время t равно vt: $x(t) = x(0) + vt$. Дифференцируя функцию, заданную этой формулой, мы убеждаемся в том, что скорость действительно равна v. Так как $x(0)$ может быть произвольным, можно записать ответ в виде $x(t) = vt + C$, где C - произвольная константа.

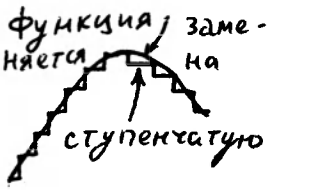
Пусть теперь скорость не постоянна, а меняется пропорционально времени: $v(t) = at$. Как найти $x(t)$? Чему равно $x(t)$, если $x'(t) = at$? Вспомним, что при $x(t) = t^2$ мы имели $x'(t) = 2t$. Чтобы получить at вместо $2t$, надо умножить t^2 на $a/2$. Получаем $x(t) = \frac{at^2}{2}$ или (вспоминая, что движение может начаться в любом месте) $x(t) = at^2/2 + C$.

В этом примере нам повезло - мы вспомнили функцию, имеющую подходящую производную. А что делать, если это не удалось? Или если зависимость v от t задана не формулой, а, например, графиком?

Б. Перемещение - площадь под графиком скорости.

Пусть нам задан график зависимости скорости от времени. Нас интересует, какой путь прошло тело (точнее, насколько изменилась его координата) с момента $t = a$ до $t = b$.



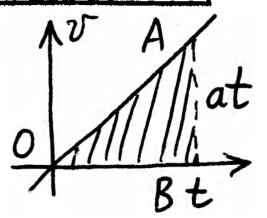


Чтобы определить это, будем считать, что скорость меняется не непрерывно, а скачками – но очень малыми: сначала в течение t_1 она равнялась v_1, затем в течение t_2 она равнялась v_2, ..., в течение t_n она равнялась v_n. Тем самым задача сводится к случаю равномерного движения: надо найти путь за каждый из отрезков времени и сложить их. Получится $v_1 t_1 + \ldots + v_n t_n$.

Памятуя, что площадь прямоугольника со сторонами v_i и t_i равна $v_i \cdot t_i$, получаем, что пройденное расстояние равно площади под графиком скорости. Поскольку ступеньки можно выбрать сколь угодно малыми, это справедливо не только для ступенчатого изменения скорости, но и в общем случае.

> Пройденный путь от $t = a$ до $t = b$ равен площади фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком скорости и вертикальными прямыми $t = a$ и $t = b$

Для случая равноускоренного движения $v(t) = at$ и путь, пройденный к моменту t, равен площади треугольника OAB, т.е. $\frac{t \cdot at}{2} = at^2/2$. Получаем тот же ответ, что и раньше.

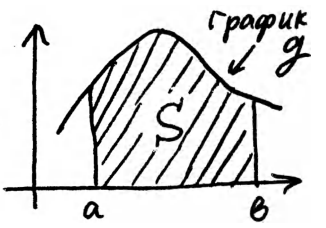


В. Интеграл.

Все, что мы говорили о координате и скорости, можно сказать о любой функции и её производной.

Будем называть площадь фигуры, изображенной на рисунке, интегралом функции g по отрезку $[a, b]$ и обозначать её $\int_a^b g$

$S = \int_a^b g$

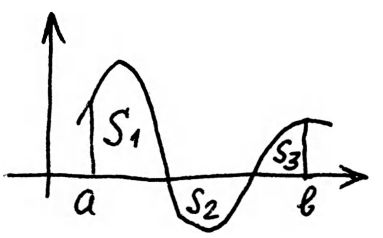


Тогда утверждение предыдущего пункта можно записать так:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'$$

Эта (важнейшая) формула называется формулой Ньютона – Лейбница.

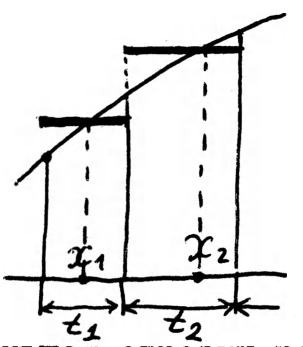
Мы неявно предполагали, что функция g положительна. Если g принимает значения разных знаков, то интеграл нужно определить как сумму площадей с соответствующими знаками: $\int_a^b = S_1 + S_3 - S_2$ (см. рис.)



При таком определении интеграла формула Ньютона – Лейбница останется верной.

Г. Как найти интеграл?

Мы свели отыскание пути к нахождению площади под графиком скорости. Но как найти эту площадь? Можно вырезать нужную нам фигуру из (как можно более однородного) листа бумаги и взвесить её. Можно также воспользоваться уже известным нам приёмом. Желая найти $\int_a^b f$, разобьём отрезок от a до b на много маленьких отрезков длиной $t_1, \dots, t_n$, в каждом из них выберем по точке x_i и будем считать, что на i-ом отрезке функция f постоянна и равна $f(x_i)$. Мы приходим к равенству



$$\int_a^b f \approx \sum f(x_i)\cdot t_i$$

которое можно сделать сколь угодно точным, уменьшая отрезки разбиения. Его правая часть называется интегральной суммой для стоящего слева интеграла.

Пример. Снова вернемся к равноускоренному движению. Пусть $g(t) = at$. Надо вычислить $\int_0^t g$. Разбивая $[0, t]$ на n равных частей $[0, t/n], [t/n, 2t/n], \dots$ и беря в качестве x_i левый конец соответствующего отрезка, получаем, что

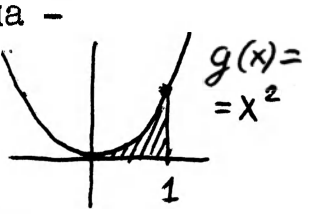
$$\sum f(x_i)\cdot t_i = \left(a\tfrac{0}{n}t + a\cdot\tfrac{1}{n}t + \dots\right)\cdot t/n =$$
$$= (at^2/n^2)(0+1+\dots+(n-1)) = (at^2/n^2)(n(n-1)/2) = \frac{at^2}{2}(1-1/n).$$

При больших n эта сумма примерно равна числу $at^2/2$, которое и есть точное значение интеграла.

Д. Отыскание площадей с помощью формулы Ньютона – Лейбница.

Мы можем с пользой применить формулу Ньютона – Лейбница и "в обратную сторону".

Пример. Найти заштрихованную на рисунке площадь под параболой, т.е. $\int_0^1 g$, где $g(x) = x^2$.



Решение. Так как $g = f'$ при $f: x \mapsto \frac{x^3}{3}$, то по формуле Ньютона – Лейбница $\int_0^1 g = \int_0^1 f' = f(1) - f(0) = 1/3$.

Таким образом, для нахождения площади под графиком функции g достаточно отыскать ее "первообразную", т.е. такую функцию f, что $f' = g$, и затем применить формулу Ньютона – Лейбница.

Это, в частности, легко сделать для любого многочлена: если $g(t) = a_n t^n + \dots + a_0$, то $f(t) = a_n\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1} + \dots + a_0 t$. Так находится площадь под графиком многочлена.

5. Интеграл в физике.

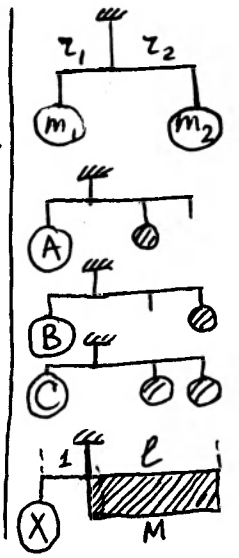
Мы приведем 3 примера применения интеграла в физике.

А. Рычаг.

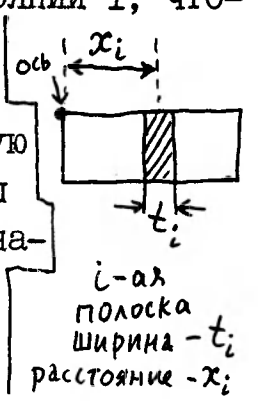
Напомним два физических принципа, относящихся к рычагу.

I (Равенство моментов) Для равновесия рычага на рисунке необходимо, чтобы $m_1 r_1 = m_2 r_2$.

2 (Аддитивность) Чтобы уравновесить два груза одновременно, нужно взять гирю, равную сумме гирь, необходимых, чтобы уравновесить каждый из них: $C = A + B$.



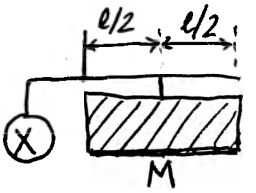
Пусть теперь к рычагу привешен однородный прямоугольник массы M со стороной ℓ (вторая сторона, как мы увидим, не играет роли). Какой груз надо подвесить к другому плечу рычага на расстоянии I, чтобы его уравновесить?



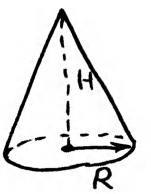
Для решения этой задачи разобьём прямоугольник на полоски шириной $t_1, \ldots, t_n$, уравновесим каждую из них (принцип I) и сложим полученные веса (принцип 2). Расстояние от оси рычага до i-ой полоски обозначим x_i. (Разумеется, оно определено лишь с точностью до t_i, т.к. можно по-разному выбирать точку прикрепления i-ой полоски. Но мы считаем t_i очень малым, так что это все равно.) Масса i-ой полоски равна $(t_i/\ell)M$, расстояние от оси x_i. Чтобы её уравновесить, необходим (на расстоянии I) груз $x_i t_i M/\ell$, а общий груз должен быть равен $(M/\ell)\sum x_i t_i$

Сумма $\sum x_i t_i$ представляет собой интегральную сумму для интеграла от функции $f(x) = x$ по отрезку $[0, \ell]$. Поэтому при мелком разбиении она равна $\int_0^\ell f = \ell^2/2$

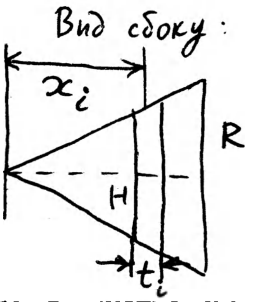
Получаем ответ: нужен груз в $(M/\ell)\cdot \ell^2/2 = M\ell/2$. Как часто бывает в физике, получив простой ответ, можно отыскать и его простое объяснение. В самом деле, представим себе, что наш прямоугольник не прикреплен к рычагу, а подвешен на ниточке за середину. Тогда груз массы M прикреплен на расстоянии $\ell/2$ и для его уравновешивания нужна гиря массы $M\ell/2$ (подвешенная на расстоянии I).



Б. Объем конуса.

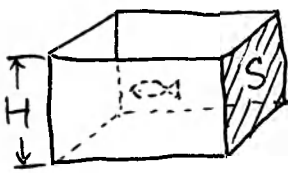


Конус имеет высоту H и радиус основания R
Нужно найти его объем.
Разобьём конус на части плоскостями, параллельными основанию. Найдем объем каждой части и сложим их. Пусть t_i - толщина i-ой части, а x_i - её расстояние от вершины конуса. (Оно, конечно, определено не однозначно, а с точностью до но мы считаем части тонкими!) Каждая часть представляет собой почти цилиндр высотой t_i и с основанием радиуса $\frac{x_i}{H}R$. Объем цилиндра

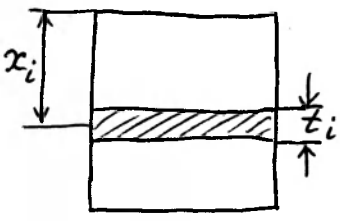


равен произведению площади основания и высоты. Площадь круга радиуса r равна πr^2 , поэтому объем i-ой части равен $\pi(x_i/H \cdot R)^2 t_i$, а общий объем $(\pi R^2/H^2)(\Sigma x_i^2 t_i)$
Сумма $\Sigma x_i^2 t_i$ есть интегральная сумма для интеграла функции $f: x \mapsto x^2$ по отрезку $[0, H]$, поэтому она равна (при "бесконечно малой" толщине слоёв) числу $\int_0^H f = H^3/3$
Получаем, что объем равен $\pi R^2 \cdot (H/3)$ (т.е. I/3 произведения площади его основания на высоту).

В. Сила давления.



Прямоугольный (параллелепипедальный?) бассейн высоты H заполнен водой. Найти силу давления на его боковую стенку площади S . Напомним, что на глубине h давление воды равно $\rho g h$. (Здесь ρ плотность воды, g - ускорение свободного падения.) Для нахождения силы разобьём боковую стенку на полоски шириной $t_1, \ldots, t_n$; пусть x_i - расстояние от верха до -ой полоски (определенное, как всегда, с точностью до t_i).



Сила давления на i -ую полоску равна произведению ($\rho g x_i$) на её площадь, которая равна $(t_i/H)S$
Поэтому общая сила давления равна

$$\Sigma \rho g x_i (t_i/H) S = (\rho g S/H) \Sigma t_i x_i$$

Заменяя, как обычно, интегральную сумму $\Sigma t_i x_i$ на интеграл от функции $f(x) = x$ по отрезку $[0, H]$ (который равен $H^2/2$) получаем ответ: $\rho g H S/2$

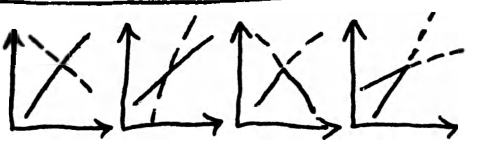
Таким образом, сила такова, как если бы вся площадь стенки находилась бы на глубине $H/2$.

Множество подобных рассуждений Вас ожидает в физике.

Задачи по анализу

I. Производная, мгновенная скорость, касательная.

I.I. На рисунках показаны мировые линии двух автомобилей. Какие дорожно-транспортные происшествия изображены?



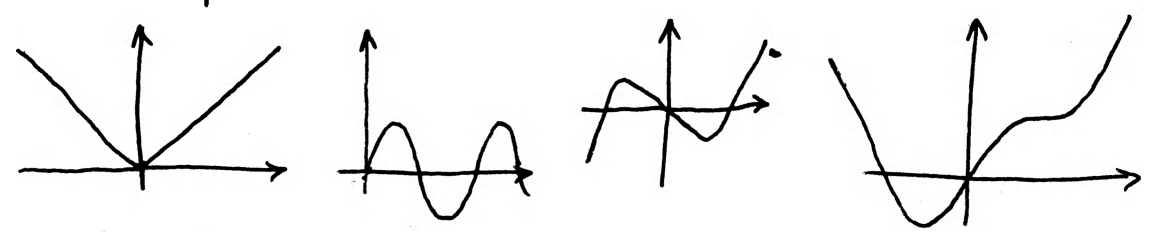
I.2. Из Нью-Йорка в Гавр в I2 ч. ежедневно отправляется пароход и через 7 дней прибывает в Гавр. Сколько пароходов встретит на своем пути пароход, отправляющийся в I8 часов (того же времени) из Гавра в Нью-Йорк?

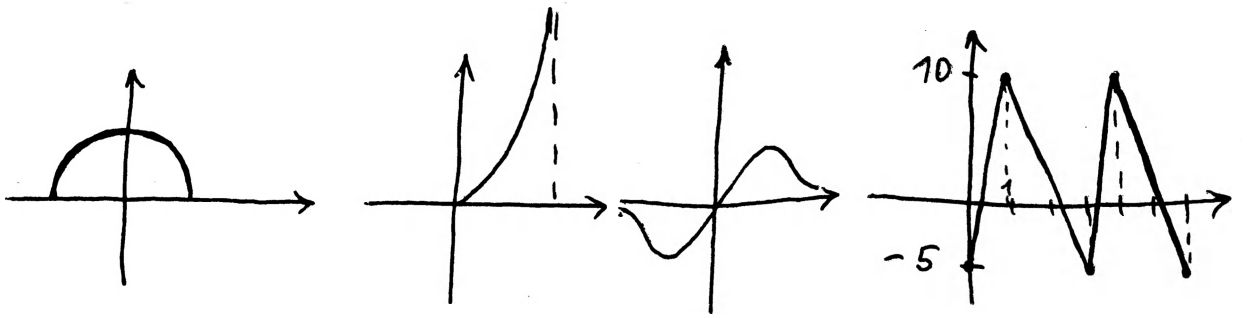
I.3* Тело движется по прямой и за каждую секунду проходит I метр. Можно ли утверждать, что оно движется равномерно?

I.4. При движении по формуле $x(t) = t^2$ найти мгновенную скорость в любой момент времени t.

I.5. (Продолжение.) Дать другое решение предыдущей задачи, использующее то, что касательная к параболе имеет с ней одну общую точку.

I.6. Нарисовать графики функции f для следующих функций f:





I.7. Найти производную функцию f', если $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

I.8. Для каких функций формула $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ точна?

I.9. Найти приближенно $\sqrt{4.001}$

2. Учимся дифференцировать.

2.1. Найти производную функции $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$.

2.2. Найти производную функции $x \longmapsto 1/x^2$.

2.3. Найти производную функции $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$.

2.4. Известно, что $f(x) = g(x+1)$.*) Чему равно $f'(a)$?

2.5. Известно, что $f(x) = g(2x)$.*) Чему равно $f'(a)$?

2.6. Известно, что $f(x) = g(-x)$.*) Чему равно $f'(a)$?

2.7. Функция f четна ($f(x) = f(-x)$). Как связаны $f'(a)$ и $f'(-a)$? чему равно $f'(0)$?

2.8. Тот же вопрос для нечетной функции ($f(-x) = -f(x)$).

2.9. Верно ли, что если f' нечетна, то f четна?

Найти производную функции f, если $f(x)$ равно*)

2.10. $3 - 2x$. 2.11. $(x+2)^3$. 2.12.* $x\sqrt[4]{x^3}$.

2.13.* $(x^2+1)(\sqrt{x}+1)$. 2.14.* $(x+1)^{100}$ 2.15.* $(2x+1)^{100}$

2.16.* $\sqrt{2-3x}$. 2.17.* $\sqrt{1-x^2}$. 2.18.* $[g(x)]^n$, где g - функция, производная которой известна.

3. Зачем нужно дифференцировать?

3.1. Доказать, что если функция f строго возрастает на $[a,b]$ и $[b,c]$, то она строго возрастает на $[a,c]$.

3.2. Найти промежутки возрастания и убывания для функции $x \mapsto x^3 - 3x^2$ и ее наибольшее и наименьшее значения на $[-1, 2]$.

3.3.* Нарисовать на плоскости множество тех $\langle p, q \rangle$, при которых функция $x \longmapsto x^3 + px^2 + qx$ возрастает на всём $\mathbb{R}$.

3.4. Найти наибольшее значение xy, если $2x+3y=1$; $x, y \geqslant 0$.

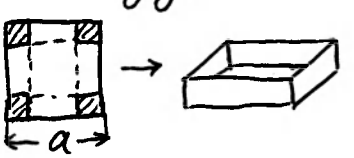
3.5. Найти наибольшее значение xy^2, если $2x+3y=1$; $x, y \geqslant 0$.

3.6. Найти число корней уравнения $x^3 - x - a = 0$ (в зависимости от a).

3.7. Найти максимум и минимум функции $x \longmapsto x^2 - 3|x| + 2$ на отрезке $[-2, 1]$

3.8. Доказать, что уравнение касательной к окружности единичного радиуса с центром в начале координат, проходящей через точку $\langle x_0, y_0 \rangle$, имеет вид $xx_0 + yy_0 = 1$.

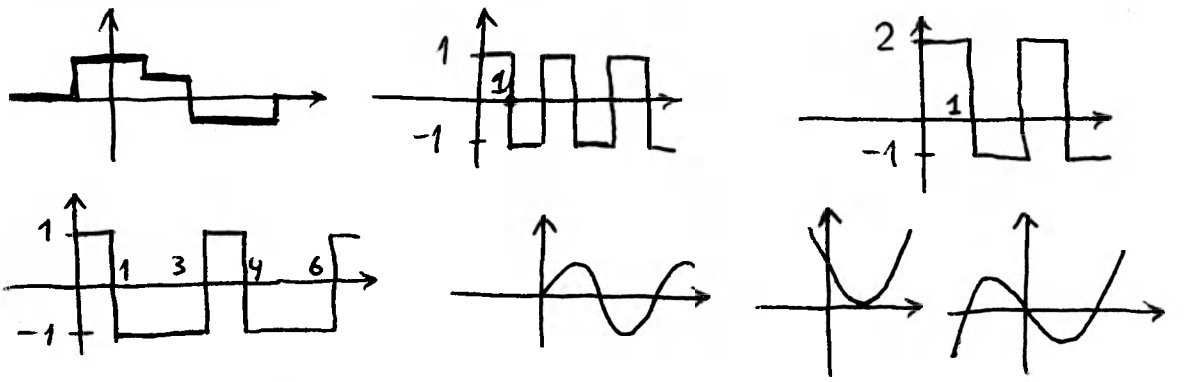
3.9. Каков максимальный объем коробки, которую можно сложить из квадратного листа $a \times a$ (см. рис.)?



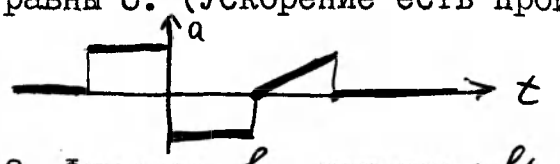
*) при всех x

4. Интеграл.

4.1. Построить по графику зависимости скорости от времени график зависимости координаты от времени:



4.2. Построить по графику ускорения графики зависимости скорости и координаты от времени. При $t=0$ скорость и координата равны 0. (Ускорение есть производная скорости: $a(t)=v'(t)$.)



4.3. Функция f нечетна: $f(-x)=-f(x)$. Чему равен $\int_{-a}^{a} f$?

4.4. Пусть g – некоторая функция. Определим f так: $f(a)=\int_0^a g$. Чему равно f'?

4.5.* Функция f имеет период 1: $f(x+1)=f(x)$ при всех x. Доказать, что число $\int_a^{a+1} f$ не зависит от выбора a.

4.6. Найти $\int_a^b f$, если $f(x)=x^2+x$.

4.7. Найти $\int_a^b f$, если $f(x)=\sqrt{x}$.

4.8.* Найти $\int_a^b f$, если $f(x)=x\sqrt{x}$.

4.9. Найти $\int_0^1 f$, если $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

(Указание. Площадь круга радиуса r равна πr^2.)

4.10. Известно, что $f(x)=Cg(x)$. Чему равно $\int_a^b f$? (Ответ требуется выразить через интеграл от функции g.)

4.11. Известно, что $f(x)=g(x+1)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.12. Известно, что $f(x)=g(-x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

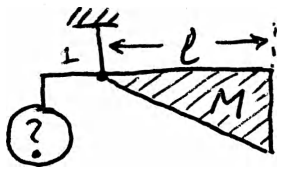
4.13. Известно, что $f(x)=g(2x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.14. Известно, что $f(x)=g(x)+h(x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.15.* Существует ли такая функция f, что $\int_a^b f = b-2a$ при всех a и b?

4.16. Как надо определить $\int_a^b f$ при $b<a$, если мы хотим, чтобы равенство $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ было верно всегда?

5. Интеграл в физике.

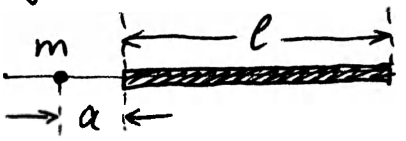


5.1. Какая гиря нужна, чтобы уравновесить однородный прямоугольный треугольник массы M с катетом l ?

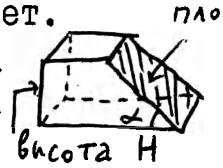
5.2. Найти объем шара радиуса r .

5.3. Найти площадь поверхности шара радиуса r . (Указание. Если покрыть шар слоем краски толщиной h , то получится шар радиуса $r+h$.)

5.4*. Закон всемирного тяготения утверждает, что массы m_1 и m_2 , находящиеся на расстоянии r , притягиваются друг к другу с силой $\gamma m_1 m_2 / r^2$ (γ - "гравитационная постоянная"). Найти силу притяжения однородного стержня массы M длиной l и маленького шара массы m , находящегося на расстоянии a от конца стержня. Что получается при $a=0$? Объясните бессмысленный ответ.



5.5. Найти силу давления, действующую на наклонную стенку сосуда (см. рисунок), заполненного водой.



5.6*. Воздушный шар сначала 20 секунд поднимается со скоростью 2 м/с, а затем, выпустив часть газа, спускается с такой же скоростью. Над землей дует ветер, скорость которого пропорциональна высоте и равна 0.5 м/с на высоте I м. На каком расстоянии от точки старта приземлится шар?

Анализ: еще несколько задач

1.* Альпинист вчера поднялся на вершину, а сегодня спустился. Доказать, что есть точка, в которой он был дважды в одно и то же время суток.

2.* Из города А в город Б ведут две дороги. Из А в Б по этим дорогам выехали две машины, связанные веревкой в 20 м, и приехали в Б, не порвав веревки. Доказать, что два круглых воза радиусом 11 м, едущих по этим дорогам навстречу друг другу, не смогут разъехаться.

3.* Улитка ползла в одном направлении 6 минут. За это время её наблюдали несколько человек, каждый наблюдал минуту и за эту минуту она проползла не более 1 м. Ни в один момент она не оставалась без наблюдения. Могла ли она проползти больше 6 м? Больше 12 м?

4.* Эскалатор движется со скоростью u. Нарисовать на плоскости те пары (v_1, v_2), при которых человек, бегущий по эскалатору со скоростью v_1, насчитает больше ступенек, чем бегущий со скоростью v_2. (Не забудьте рассмотреть различные знаки у v_1 и v_2.)

5.* Доказать, что абсцисса точки пересечения двух касательных к параболе (графику квадратного трехчлена) равна полусумме абсцисс точек касания.

6.** Система $x = y^2 + c_1$, $y = x^2 + c_2$ имеет единственное решение (x_0, y_0). Доказать, что $x_0 y_0 = 1/4$.

7.* Найти производную функции $x \mapsto (\sqrt{x^3 + x})/(2x+1)^{10}$.

8.* Найти точку параболы $y = x^2$, ближайшую к точке $(-1, 2)$.

9.* Найти $f'(x)$, если $f(x)$ – длина кривой с уравнением (1) $y = |x|$ (2) $y = x + |x|$ между точками с абсциссами -1 и x.

10.* Найти уравнение касательной к кривой $x^2 + y^4 = 2$ в точке $(1, 1)$.

11.** Найти уравнение касательной к кривой $x^3 + x + y^3 + y = 1$ в точке $(1, 0)$.

12.* Найти расстояние от каждой из точек $(0,4)$ и $(0,6)$ до параболы $y = x^2/10$.

13.* Автомобиль движется с ускорением, не превышающим a по модулю. Какое наибольшее расстояние он может проехать за время t, если в конце пути он должен остановиться?

I4.** Функция f такова, что при всех x и h погрешность $\alpha(x,h)$ в формуле $f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h$ (т.е. разность её левой и правой частей) не превосходит Ch^3, где C – константа. Доказать, что f – линейная функция, т.е. при некоторых a и b равенство $f(x)=ax+b$ верно при всех x.

I5.* Выпуклое множество M на плоскости имеет площадь S и периметр l. Доказать, что площадь множества всех точек, удаленных от M не более чем на r, равна $a+br+cr^2$, где a, b и c – константы, не зависящие от r. Найти a, b, c.

I6.* Функция $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ удовлетворяет условиям $f'(x)=f(x)$, $f(0)=1$. Найти a_i.

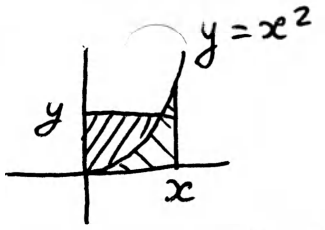
I7.* (Продолжение.) Вычислить $f(1)$ с точностью I0%.

I8.** (Продолжение.) Доказать, что $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ при всех x и y.

I9.* Найти длину кривой $y=x^{3/2}$ между точками с абсциссами 0 и I.

20.* Доказать, что интегралы от функции $f: x\longmapsto 1/x$ по отрезкам $[a,b]$ и $[ca,cb]$ равны.

2I.* Доказать неравенство:
$xy\le(x^3/3)+\frac{2}{3}y^{3/2}$ при $x,y\ge 2$
(Указание. См. рисунок.) Когда это неравенство превращается в равенство?



22.* Функция f – убывающая. Доказать, что при $0\le\alpha\le 1$ выполнено неравенство $\int_0^\alpha f\le\alpha\int_0^1 f$

23.* Доказать, что если $f(a)=f(b)=0$, то
$$\int_a^b|f|\le[(a-b)^2/4]\cdot\max\{|f'(x)|\mid x\in[a,b]\}$$

24.** Доказать, что если $g(x)=f(x-1/x)$, то интегралы $\int_0^\infty g$ и $\int_0^\infty f$ равны.

25.** Если функции f и g либо обе возрастают, либо обе убывают, то $\int_0^1(f\cdot g)\ge(\int_0^1 f)\cdot(\int_0^1 g)$

26.** Функция f такова, что множество $\{\langle x,y\rangle\mid y>f(x)\}$ выпукло (f' монотонно возрастает). Доказать, что

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)\le\int_a^b f\le\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\qquad(a<b)$$

Введение в анализ: подготовительные задачи

I. Ученик называется хорошим, если по каждому предмету он либо не имеет двоек, либо имеет хотя бы две пятерки. Какой ученик называется плохим (точнее, нехорошим)?

2. Можно ли разменять I5 коп. двумя монетами, одна из которых - не пятак?

3. Верно ли, что не всякое действительное число, меньшее 3, имеет квадрат, не больший 9 ?

4. При каких c верны такие утверждения:
(I) для всякого $x \in [0,1]$ найдется такое $y \in [0,2]$, что $x+y > c$;
(2) для всякого $x \in]0,1[$ найдется такое $y \in]0,2[$, что $x+y > c$?

5. Пусть A - свойство, которым могут обладать (или не обладать) натуральные числа. Доказать, что утверждения

(I) существует такое k , что все n , большие k , обладают свойством A ;

(2) множество тех n , которые не обладают свойством A , конечно, -
равносильны. Если они верны, говорят, что "свойство A выполнено для почти всех натуральных чисел".

6. (Продолжение.) Как переформулировать утверждение "неверно, что свойство A выполнено для почти всех натуральных n ", не употребляя отрицания?

7. Построить такую последовательность положительных целых чисел, чтобы для любого целого положительного N было справедливо утверждение:"почти все члены последовательности делятся на N ".

8. Число x называется наименьшим элементом множества M , если (I) $x \in M$ и (2) $x \leqslant y$ для любого $y \in M$. Имеют ли наименьший элемент множества (I) $[0, I]$ (2) $]0, I[$
(3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geqslant 2\}$ (4) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 \geqslant 2\}$

9. Даны числа a и b . Известно, что если некоторое число x меньше a , то оно меньше b : $\forall x \; ((x < a) \Rightarrow (x < b))$
Следует ли отсюда, что (I) $a < b$; (2) $a \leqslant b$?

I0. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется ограниченной сверху числом C , если $a_i \leqslant C$ при всех i . Последовательность называется ограниченной сверху, если есть число, которое ограничивает её сверху. Не употребляя слова "не", дать определение не ограниченной сверху последовательности.

II. Дать разумное определение ограниченной снизу последовательности.

Ограниченной называется последовательность, ограниченная и сверху, и снизу.

I2. Может ли ограниченная последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена (a_n - наибольший/наименьший член, если $a_n \geqslant a_k$ / $a_n \leqslant a_k$ при всех k)?

Множество M называется ловушкой для последовательности a, если почти все ее члены лежат в нем, т.е. если множество тех n, при которых $a_n \notin M$, конечно. Множество M называется кормушкой для последовательности, если оно содержит бесконечно много её членов, т.е. если множество тех n, при которых $a_n \in M$, бесконечно.

I3. Последовательность a такова: I, -I, I, -I,... Какие множества являются её (I) ловушками; (2) кормушками?

I4. Известно, что множества A и B являются ловушками для последовательности a. Можно ли утверждать, что $A \cap B$ - её ловушка?

I5. Известно, что множества A и B являются кормушками для последовательности a. Можно ли утверждать, что $A \cap B$ - её кормушка?

I6. Известно, что отрезок $[I, 3]$ является ловушкой для последовательности a. Можно ли утверждать, что хотя бы один из отрезков $[I, 2]$ и $[2, 3]$ является её ловушкой?

I7. Известно, что отрезок $[I, 3]$ является кормушкой для последовательности a. Можно ли утверждать, что хотя бы один из отрезков $[I, 2]$ и $[2, 3]$ является её кормушкой?

I8. Существует ли последовательность, для которой каждой отрезок положительной длины - кормушка?

I9. Известно, что $|a_n| \leqslant 1$ при всех n. Доказать, что существует отрезок длины 0.00I, являющийся кормушкой для последовательности a.

20. Известно, что $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ и $a_i \leqslant 1$ при всех i. Доказать, что существует отрезок длины 0.00I, являющийся ловушкой для последовательности a.

2I. Доказать, что свойства (I) последовательность ограничена; и (2) существует отрезок, являющийся её ловушкой, - равносильны.

Пусть $a = a_0, a_1, a_2, \ldots$ – произвольная последовательность. Вычеркнем из нее какие-то члены так, чтобы осталась бесконечная последовательность. Получаемые таким образом последовательности называются подпоследовательностями последовательности a. Например, у последовательности 0, I, 2,... есть подпоследовательность I, 3, 5, 7,... (но нет подпоследовательности I,I,2,3... или 3, I, 5, 7,...).

22. Существует ли такая последовательность a целых чисел, что любая последовательность целых чисел является подпоследовательностью последовательности a ?

23. Доказать, что из всякой последовательности можно выбрать (бесконечную) монотонную (т.е. неубывающую или невозрастающую) подпоследовательность.

24. Существует ли такое множество интервалов на действительной прямой, что пересечение всех интервалов из этого множества есть $[0, I[$?

25. Существует ли такое множество интервалов на действительной прямой, что объединение всех интервалов из этого множества есть $[0, I[$?

26. Тот же вопрос, что и в задачах 24 и 25, но интервалы заменены отрезками.

З а ч е т н ы е з а д а ч и

I. Множество M называется ограниченным сверху, если существует такое C, что $x \leqslant C$ для любого $x \in M$. Не употребляя отрицания, сформулировать, что значит " M не ограничено сверху".

2. Существует ли последовательность, для которой отрезок $[1,2]$ является ловушкой, а отрезок $[3,4]$ – кормушкой?

3. Известно, что $[1, 2]$ – ловушка для последовательности . Может ли последовательность (I) иметь члены, большие I000; (2) иметь бесконечно много отрицательных членов; (3) быть не ограниченной снизу?

У ч е т р е ш е н н ы х з а д а ч

I 2 3 4 5 6 7 8 9 I0 II I2 I3 I4 I5 I6 I7 I8 I9 20 2I 22

23 24 25 26

Разные задачи о последовательностях

I. Существует ли такая последовательность $a: a_0, a_1, \ldots$, что $a_{k+l} = a_k + a_l + kl$ при всех натуральных k и l?

2. Известно, что $x_0 = x_{100} = 0$, $x_n \leq (x_{n-1} + x_{n+1})/2$ при n от I до 99. Доказать, что $x_n \leq 0$ при n от I до 99.

3. Последовательность a определена так: $a_0 = 1$, $a_1 = 7$ a_{n+1} = (остаток от деления на 347 числа $2^{a_{n-1}}$ + число учеников в $a_n + 1$ -ой школе г. Москвы). Доказать, что последовательность a периодична. (Это значит, что, начиная с некоторого места, повторяется одна и та же последовательность цифр.)

4. Последовательность a такова: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ Доказать, что $a_n < 3$ при всех n.

5. Последовательность a такова: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$. Доказать, что эта последовательность не ограничена сверху.

6. (Продолжение.) Доказать, что $a_n \geq \sqrt{2n}$

7.* Доказать, что последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонно неубывает. (Указание. Можно использовать неравенство среднего арифметического и геометрического или бином Ньютона.)

8.* (Продолжение.) Доказать, что эта последовательность ограничена.

9. При каких действительных c последовательность a: $a_n = n \cdot \{cn\}$ ограничена? ($\{x\}$ - дробная часть x.)

I0. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ при любых m и n. Доказать, что последовательность a_n/n ограничена.

Назовем числом перемен знака последовательности число пар соседних членов разных знаков, которые получатся, если вычеркнуть из нее все нулевые члены.

II. Доказать, что последовательность $a_0, a_0+a_1, \ldots, a_{n-1}+a_n, a_n$ обладает не большим числом перемен знака, чем последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n$

I2. Тот же вопрос для последовательности

$a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots, a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

I3. Доказать, что если последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет k перемен знака, то последовательность $a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1}, -a_n$ имеет их не менее $k+1$.

I4. Тот же вопрос для последовательности

$a_0, a_1 - 2a_0, a_2 - 2a_1, \ldots, a_n - 2a_{n-1}, -2a_n$.

I5. Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что каждое целое положительное число однозначно представимо в виде разности двух членов этой последовательности?

Математический анализ

Пределы

Определение предела. Число A называется пределом последовательности $a: a_0, a_1, \ldots$ (обозначения: $a \to A$, $\lim a = A$), если для всякого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого, лежат в интервале $]A-\varepsilon, A+\varepsilon[$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon).$$

I. Доказать, что $a \to A$ тогда и только тогда, когда любой интервал, содержащий A, является ловушкой для последовательности a.

2. Сформулировать, что означает, что число A не является пределом последовательности (не используя слова "не").

3. Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности a найдется бесконечно много членов, по модуля меньших ε. Можно ли утверждать, что $a \to 0$?

4. Доказать, что число I является пределом последовательности $a_n = (n+1)/n$, а число 2 не является пределом этой последовательности.

5. Доказать, что никакое число не является пределом последовательности I, -I, I, -I,...

6. Доказать, что последовательность не может иметь двух различных пределов.

Последовательность, имеющая предел A, называется сходящейся к A; последовательность, имеющая какой-то предел, называется сходящейся.

7. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность ограничена.

8. Все члены сходящейся последовательности положительны. Можно ли утверждать, что ее предел положителен? Можно ли утверждать, что предел неотрицателен, если все члены неотрицательны?

9. Доказать, что если $|a_n| \le b_n$ и $b \to 0$, то $a \to 0$.

IO. ("Теорема о двух милиционерах".) Известно, что $a_n \le b_n \le c_n$ при всех n и что a и c ("милиционеры") имеют общий предел A ("отделение"). Доказать, что b ("задержанный") имеет тот же предел

II. Сделаем несколько изменений в определении предела. Какие свойства последовательностей при этом получатся?

(I) $(\forall \varepsilon > 0)\ \forall N (\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon)$ (2) $\exists N (\forall \varepsilon > 0)(\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon)$

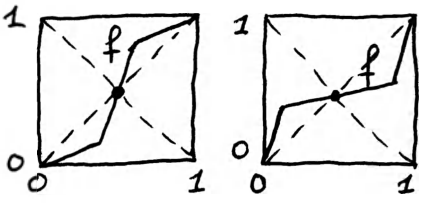
(3) $(\exists \varepsilon > 0)\ \forall N (\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon)$ (4) $(\exists \varepsilon > 0)\ \exists N (\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon)$

I2. Из сходящейся последовательности вычеркнули некоторые члены (возможно, бесконечное число), при этом осталась бесконечная последовательность (подпоследовательность исходной). Доказать, что она будет сходиться к тому же пределу.

I3. Последовательность a сходящаяся. Последовательность b получена из a перестановкой членов: $b_n = a_{f(n)}$, где f – взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$. Доказать, что b сходится к тому же пределу, что и a.

I4. Последовательность a состоит из неотрицательных чисел, причем $a_0 + \ldots + a_n \le 1$ для всех n. Доказать, что эта последовательность сходится к 0.

I5.* График функции f изображен на рисунке (I). При каких $a \in [0, 1]$ последовательность $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots$ имеет предел? Тот же вопрос для рисунка (2).



I6.* Может ли сходящаяся последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена?

Арифметические операции

Назовем последовательность бесконечно малой, если она имеет 0 своим пределом.

I7. Доказать, что $(a_n \to A) \Leftrightarrow (b_n = a_n - A$ – бесконечно малая).

I8. Последовательности $a: a_0, a_1, \ldots$ и $b: b_0, b_1, \ldots$ – бесконечно малые. Доказать, что их сумма и разность $a+b: a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots$ и $a-b: a_0-b_0, a_1-b_1, \ldots$ – бесконечно малые.

I9. (Предел суммы и разности.) Доказать, что если $a \to A$ $b \to B$, то последовательность $a+b$ сходится к $A+B$, а последовательность $a-b$ сходится к $A-B$. (Сумма/разность сходящихся последовательностей – сходящаяся, и предел суммы/разности равен сумме/разности пределов.)

20. Известно, что последовательности a и b не сходятся. Можно ли утверждать, что $a+b$ – не сходящаяся?

2I. Тот же вопрос, если a сходится, а b – нет.

22. Известно, что последовательности $a+b$ и $a-b$ сходятся. Можно ли утверждать, что последовательности a и b сходятся?

23. Стороны прямоугольника, каждая из которых не превышает 5 м, измерили с точностью до I см. Затем результаты измерений перемножили. Может ли полученное число отличаться от истинной площади прямоугольника более чем на (I) I $см^2$; (2) I $м^2$?

24. Доказать, что если a – бесконечно малая последовательность, а b – ограниченная, то последовательность $a \cdot b : a_0 \cdot b_0, a_1 \cdot b_1, \ldots$ – бесконечно малая.

25. (Предел произведения.) Доказать, что если $a \to A$, $b \to B$, то $ab \to AB$. (Произведение сходящихся последовательностей сходится, и предел произведения равен произведению пределов.)

26. Что неверно в следующем рассуждении ($\lim a_n$ – предел последовательности a): $1 = \lim 1 = \lim (1/n \cdot n) = \lim 1/n \cdot \lim n = 0 \cdot \lim n = 0$!

Говорят, что последовательность a стремится к бесконечности (запись $a \to \infty$), если для всякого C все члены последовательности, начиная с некоторого, по модулю больше C :

$\forall C \; \exists N \; (\forall n > N) \; (|a_n| > C)$.

27. Доказать, что если a стремится к бесконечности и все члены a отличны от 0, то последовательность $1/a : 1/a_0, 1/a_1, \ldots$ стремится к 0. Доказать, что если a стремится к 0 и все члены a отличны от 0, то последовательность $1/a$ стремится к бесконечности.

28. Дать разумные определения понятий " $a \to +\infty$ " и " $a \to -\infty$ ". Что можно сказать про суммы и произведения таких последовательностей?

29. Известно, что последовательность $a_0, a_1, \ldots$ сходится к A, причем $A \neq 0$. Доказать, что почти все (все, кроме конечного числа) члены последовательности a отличны от 0 и что последовательность $1/a_0, 1/a_1, \ldots$ сходится к $1/a$. (Конечное число её членов не определено, но это несущественно.)

30. (Предел частного.) Доказать, что если $a \to A$, $b \to B$ причем $B \neq 0$, то последовательность a/b стремится к A/B.

Мы увидим впоследствии, что теоремы о пределе произведения, частного, суммы и разности можно коротко сформулировать так: арифметические операции непрерывны.

31. Что можно сказать о произведении последовательностей, если одна из них имеет ненулевой предел, а другая стремится к бесконечности?

32.* Доказать, что если последовательность a сходится, то и последовательность b, n-ый член которой есть среднее арифметическое первых n членов последовательности a, сходится к тому же пределу. Можно ли утверждать, что a сходится, если известно, что сходится b ?

33. Последовательность a сходится. Доказать, что последовательность b, для которой $b_n = a_{n+1} - a_n$, сходится к 0. Верно ли обратное?

Классические пределы

34. Доказать, что последовательность $a: 1^k, 2^k, \ldots$ $(a_n = n^k)$ при любом целом $k > 0$ стремится к бесконечности, а при любом целом $k < 0$ сходится к 0.

35. Доказать, что последовательность $a: a_n = 0.01n^3 - 1000n^2 - 1$ стремится к бесконечности.

36. Пусть P – произвольный многочлен степени $k > 0$: $P(x) = c_k x^k + \ldots + c_0$, причем $c_k \neq 0$. Доказать, что последовательность $P(0), P(1), \ldots$ стремится к бесконечности.

37. (Продолжение.) Доказать, что последовательность $P(n)$ стремится к бесконечности "с той же скоростью, что ее старший член", т.е. что отношение $P(n)/c_k n^k$ сходится к I.

38. Что можно сказать о последовательности $P(n)/Q(n)$ если P и Q – два многочлена?

39. Доказать, что последовательность $a_n = \sqrt{n}$ стремится к бесконечности.

40. Доказать, что последовательность $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ сходится к 0.

41. Найти предел последовательности $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$.

42. Доказать, что при $\alpha > 1$ последовательность $a_n = \alpha^n$ стремится к бесконечности. (Указание. Если $\alpha = 1 + h$, $h > 0$, то $\alpha^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$.)

43. Доказать, что при $|\alpha| < 1$ последовательность $a_n = \alpha^n$ сходится к 0.

44. Доказать, что при $\alpha > 1$ последовательность α^n/n стремится к бесконечности. (Эта задача показывает, что n стремится к бесконечности "существенно быстрее" .) (Указание. Воспользуйтесь биномом Ньютона: $(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 (\text{sic!}) + \ldots$)

45. (Продолжение.) Доказать, что α^n растет быстрее всех степеней n: последовательность α^n/n^k $(\alpha > 1, k \in \mathbb{N})$ стремится к бесконечности. (Указание. $\alpha^n/n^k = [(\sqrt[k]{\alpha})^n/n]^k$)

46. Последовательность положительных чисел a такова, что последовательность b: $b_n = a_{n+1}/a_n$ сходится к α. Доказать, что если $\alpha > 1$, то a стремится к бесконечности, а если $\alpha < 1$, то a стремится к 0.

47. (Продолжение.) Используя это, докажите, что $a^n/n^k \to \infty$ при $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$

48. (Продолжение.) Что можно сказать, если $a = 1$ & 46? (Может ли a стремиться к бесконечности? иметь конечный предел? сходиться к 0? не иметь предела вовсе?)

49. (Непрерывность корня.) Доказать, что если $a_n \to A$, a_n неотрицательны, то $\sqrt{a_n} \to \sqrt{A}$

50. Найти пределы: $(2^n+3^n+4^n)/(1^n+5^n)$, $(2n^2+3^n)/(4n^2+7\cdot 3^n)$

51. $\sqrt[n]{(2^n+3^n+4^n)}$

52. $\sqrt{n+1000}/n+1$, $(2\sqrt{n}+3\sqrt[3]{n})/(3\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n})$.

53. $100^n/n!$

54. Доказать, что (1) $n^2 > 1000n$; (2) $2^n > 1000n$; (3) $(1.01)^n > 1000n^{1000}$ (4) $n! > 1000^n$ при почти всех n.

55. Известно, что $a_n \to 1$ и $a_n \neq 1$ при всех n. Найти пределы: $n \longmapsto (2a_n - 1)/(a_n + 1)$.

56. ... $(a_n^2 + a_n - 2)/(a_n - 1)$.

57. ... $(a_n^{10} - 1)/(a_n - 1)$.

58. Найти предел a : $a_n = \sqrt[n]{2}$.

59.* Найти предел a : $a_n = \sqrt[n]{n}$.

60.* Последовательность a такова, что $a_{n+1} = 3 + a_n/2$ Доказать, что она сходится и найти её предел.

61.* Последовательность a такова: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$. Доказать, что она сходится и найти её предел.

62.* Известен следующий способ извлечения квадратного корня из числа $m > 0$: строится последовательность a, у которой $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + m/a_n)$. Доказать, что эта последовательность сходится к $\sqrt{a}$.

63.** Нельзя ли придумать чего-нибудь подобного для извлечения кубических корней?

64.* По кругу написано 1000 чисел. Рядом с каждым числом пишут среднее арифметическое его и следующего по часовой стрелке числа. Затем исходные числа стирают. Эту операцию проделывают многократно. Выберем некоторое место на круге и рассмотрим последовательность чисел, стоящих на этом месте после 0, 1, 2... операций. Доказать, что эта последовательность имеет предел и он равен среднему арифметическому чисел, которые были вначале написаны на круге.

65.* Найти предел последовательности a: $a_n = \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$

Метрические пространства.

Понятие предела имеет смысл не только для числовых последовательностей. Чтобы определить его по единой схеме для разных случаев (например, для последовательностей точек плоскости), введем понятие метрического пространства.

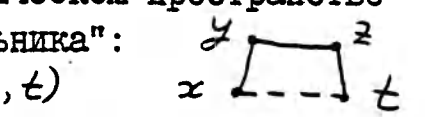
Пусть M – некоторое множество. Функция ρ, сопоставляющая с каждой парой x, y элементов M некоторое число, называется функцией расстояния или метрикой, если выполнены такие свойства: (1) $\rho(x,y)$ всегда неотрицательно; $\rho(x,x)=0$, $\rho(x,y)>0$ при $x \neq y$; (2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ при всех $x, y \in M$; (3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$ при всех x, y, z (неравенство треугольника). Метрическим пространством называется множество с заданной на нем метрикой. (Задавая разные метрики на одном и том же множестве, получаем разные пространства.) Число $\rho(x,y)$ называют расстоянием между x и y.

66.* Будут ли следующие множества и заданные на них функции образовывать метрические пространства? (1) $M=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=x-y$; (2) $M=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=(x-y)^2$; (3) M = плоскость, $\rho(x,y)$ = расстояние между проекциями точек x и y на ось абсцисс; (4) M = множество всех точек г. Москвы, $\rho(x,y)$ = наименьшее время, необходимое для проезда из x в y; (5) ...для проезда из x в y и обратно; (6) M = поверхность бублика, $\rho(x,y)$ – длина кратчайшего пути из x в y по поверхности бублика.

67.* (Основные примеры метрических пространств.) (1) Доказать, что $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$ – метрическое пространство. Его мы будем называть "метрическое пространство $\mathbb{R}$". (2) Доказать, что множество всех точек плоскости с метрикой $\rho(x,y)=|xy|$ (длина отрезка xy) – метрическое пространство. Его мы будем кратко называть плоскостью.

68.* Доказать, что в любом метрическом пространстве справедливо "неравенство четырехугольника":

$$\rho(x,t) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)+\rho(z,t)$$



69.* Доказать, что на любом множестве можно ввести дискретную метрику: $\rho(x,y)$ = (если $x=y$ то 0 иначе 1).

70.* Доказать, что если ρ – метрика на M, то функция ρ': $\rho'(x,y)=\min(1,\rho(x,y))$ – тоже метрика.

71.* На плоскости наряду с обычной метрикой $\rho(\langle x_1,x_2\rangle,\langle y_1,y_2\rangle)=((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2)^{1/2}$ ($\langle x_1,x_2\rangle$ и $\langle y_1,y_2\rangle$ – координаты x и y) можно определить и метрики $\rho_1(\langle x_1,x_2\rangle,\langle y_1,y_2\rangle)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ и $\rho_\infty(\langle x_1,x_2\rangle,\langle y_1,y_2\rangle)=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$. Проверить, что это действительно метрики.

72.* Определим на множестве всех последовательностей длины n расстояние так: $\rho(\langle x_1 \dots x_n\rangle, \langle y_1 \dots y_n\rangle)$ = (число тех i, при которых $x_i \neq y_i$). Доказать, что это – метрика (называемая метрикой Хемминга).

73.* Определим на множестве всех бесконечных последовательностей натуральных чисел функцию $\rho(x,y)$, равную 0, если $x = y$, и равную 2^{-n}, если $x \neq y$ и n – наименьшее число, для которого $x_n \neq y_n$. Проверить, что это метрика. (Возникающее пространство называется пространством Бэра.)

74.* Пусть M_1 и M_2 – два метрических пространства, ρ_1 и ρ_2 – метрики. Определим на множестве пар $M_1 \times M_2 = \{\langle m_1, m_2\rangle | m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$ метрику по формуле $\rho(\langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2)$. Проверить, что это метрика. Возникающее пространство называется произведением пространств M_1 и M_2.

Пусть M – метрическое пространство, $x \in M$, $r > 0$. Назовем открытым [замкнутым] шаром с центром x радиуса r множество всех точек y, для которых $\rho(x,y) < r$ [$\rho(x,y) \leqslant r$].

75.* Доказать, что если открытые шары радиуса I/2 с центрами x и y пересекаются, то $\rho(x,y) < 1$. Верно ли обратное (в произвольном метрическом пространстве)?

76.* Доказать, что если $\rho(x,y) < 1$, то открытый шар с центром x радиуса I содержится в открытом шаре с центром y радиуса 2.

77.* Шары с радиусами R_1 и R_2, где $R_1/R_2 = 10$, пересекаются. Радиусы шаров увеличили вдвое, не меняя центров. Доказать, что один из полученных шаров содержится в другом.

78.* Могут ли в метрическом пространстве существовать 2 таких шара разных радиусов, что шар большего радиуса содержится в шаре меньшего радиуса и не совпадает с ним? (Центры шаров могут быть различны.)

79.* (I) Сколько элементов содержит замкнутый шар радиуса I в пространстве последовательностей n нулей и единиц с метрикой Хемминга? (2) Доказать, что если дано несколько непересекающихся шаров радиуса I, то их число не превосходит $2^n/n+1$. (3) Написано несколько последовательностей нулей и единиц длины n, причем любые две из них отличаются по крайней мере в 3 местах. Доказать, что их число не превосходит $2^n/n+1$.

Пусть $x_0, x_1, \dots$ – последовательность точек метрического пространства. Говорят, что точка a – её предел, если для всякого $\varepsilon > 0$ шар с центром a и радиусом ε содержит почти все её члены: $(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N\ (\forall n > N)\ (\rho(x_n, a) < \varepsilon)$.

При $M = \mathbb{R}$ получаем обычное определение предела.

80.* Доказать, что a есть предел последовательности точек $x_0, x_1, \ldots$ тогда и только тогда, когда (числовая) последовательность $\rho(x_0, a), \rho(x_1, a), \ldots$ сходится к 0.

81.* Пусть $x_0, x_1, \ldots$ – последовательность точек плоскости. Доказать, что сходится к точке a (в обычной метрике) тогда и только тогда, когда последовательность их первых координат сходится к первой координате точки a, а последовательность вторых координат – ко второй.

82.* Доказать, что последовательность не может иметь двух разных пределов.

83.* Известно, что $x_0, x_1, \ldots \to a$ и $y_0, y_1, \ldots \to b$. Доказать, что (числовая) последовательность $\rho(x_i, y_i)$ сходится к $\rho(a, b)$.

84.* Доказать, что если последовательность сходится и предел её лежит внутри открытого шара, то почти все её члены лежат внутри этого шара.

85.* Какие последовательности являются сходящимися (I) в дискретной метрике? (2) в метрическом пространстве с конечным числом точек? в пространстве Бэра ?

Точка a называется предельной точкой последовательности $x_0, x_1, \ldots$, если для любого $\varepsilon > 0$ шар радиуса ε с центром a содержит бесконечно много членов последовательности.

86.* Может ли существовать последовательность действительных чисел, имеющая несколько предельных точек? ...для которой предельными точками являются числа I, I/2, I/3, I/4,... и только они?

87.* Может ли существовать последовательность действительных чисел, для которой любое число является предельной точкой? ... последовательность точек плоскости, для которой любая точка плоскости является предельной?

88.* Доказать, что следующие свойства равносильны: (I) a – предельная точка последовательности x; (2) существует подпоследовательность последовательности x, сходящаяся к a. (Напомним, что подпоследовательностью называется любая бесконечная последовательность, получающаяся из исходной выбрасыванием некоторых членов.)

Открытые и замкнутые множества.

Точка x называется внутренней точкой множества A точек метрического пространства M, если некоторый шар положитель-

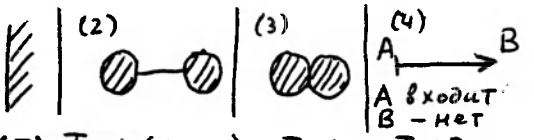
ного радиуса с центром в x целиком содержится в A. Множество называется открытым, если все его точки являются для него внутренними.

89.* Доказать, что открытый шар – открытое множество.

90.* Доказать, что пересечение конечного числа и объединение любого числа открытых множеств открыты.

91.* Доказать, что множество всех точек любого множества A открыто. (Это множество обозначается $Int(A)$ и называется внутренностью A.)

92.* Нарисовать внутренности для таких подмножеств плоскости:



93.* Можно ли утверждать, что (1) $Int(A \cap B) = Int A \cap Int B$; (2) $Int(A \cup B) = Int A \cup Int B$ для любых множеств A и B?

94.* Доказать, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно может быть представлено в виде объединения произвольного числа открытых шаров.

95.* Какие открытые множества в R не содержат ни одной рациональной точки?

96.* Доказать, что всякое открытое множество на прямой или на плоскости есть счетное объединение открытых шаров.

97.* Какие множества открыты в дискретной метрике?

98.* Доказать, что следующие свойства метрического пространства M равносильны: (1) существует счетное множество, всюду плотное в M, т.е. пересекающееся с любым открытым шаром; (2) существует такое счетное семейство открытых множеств, что всякое открытое множество представимо в виде объединения некоторых множеств этого семейства. Если эти свойства выполнены, M называется сепарабельным.

99.* Доказать, что пространство, в котором любая последовательность имеет предельную точку, сепарабельно.

Точка x называется точкой касания множества A в метрическом пространстве M, если любой шар положительного радиуса с центром в x пересекается с A. Множество A замкнуто, если оно содержит все свои точки касания.

100.* Доказать, что (x касается A) $\Leftrightarrow$ (x не внутренняя для $M \setminus A$); (A замкнуто) $\Leftrightarrow$ ($M \setminus A$ открыто).

101.* Доказать, что множество предельных точек любой последовательности замкнуто.

Множество всех точек, касающихся A, называется замыканием A и обозначается $\overline{A}$.

102.* Доказать, что множество $\bar{A}$ всегда замкнуто. Чему равно замыкание $\mathbb{Q}$ (как подмножества $\mathbb{R}$)? Как связано замыкание A с внутренностью $M \setminus A$?

103.* Придумать такое множество A, чтобы A, $\mathrm{Int}A$, $\bar{A}$, $\mathrm{Int}(\bar{A})$, $\overline{\mathrm{Int}(A)}$ были бы попарно различны.

104.* Доказать, что всякое замкнутое множество на плоскости является замыканием некоторого счетного множества.

105.* (Нормальность метрических пространств.) Доказать, что если A_1 и A_2 – непересекающиеся замнутые подмножества метрического пространства, то существуют непересекающиеся открытые множества B_1 и B_2, их содержащие: $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$.

106.* Какие точки могут являться пределами последовательностей, все члены которых принадлежат некоторому множеству A?

107.* На множестве M заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что следующие свойства равносильны: (1) всякое множество, открытое в одной из них, открыто в другой; (2) всякая последовательность, имеющая некоторый предел в одной из них, имеет тот же предел в другой. Если эти свойства выполнены, метрики называют <u>эквивалентными</u>. Приведите пример двух неэквивалентных метрик.

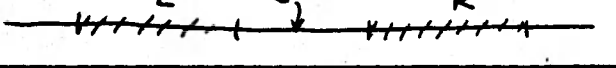
108.* Мальчик Петя вышел из дома и пошел в школу. На полпути он свернул к кинотеатру. На полпути к нему он повернул к катку. Не дойдя половину пути до катка, он решил, что нужно все-таки учиться и пошел в школу. На полпути он свернул к кинотеатру... Чем кончит мальчик Петя?

109.* Доказать, что всякое открытое множество метрического пространства может быть представлено в виде объединения счетного числа замкнутых множеств, а всякое замкнутое множество – в виде счетного пересечения открытых.

<u>Аксиома полноты</u>

Следующее свойство действительных чисел играет в анализе фундаментальную роль.

Пусть L и R – два непустых множества действительных чисел, причем любой элемент l множества L не больше любого элемента r множества R. Тогда найдется <u>разделяющее число</u> c, т.е. такое c, что $l \le c$ для всех $l \in L$ и $c \le r$ для всех $r \in R$.



110. Докажите, что аналогичное свойство для множества $\mathbb{Q}$ неверно: если L – множество всех рациональных чисел, меньших

$\sqrt{2}$, а R – множество всех рациональных чисел, больших $\sqrt{2}$, то не существует разделяющего их рационального числа.

Существуют различные утверждения, вытекающие из аксиомы полноты (многие из них эквивалентны ей). В этом разделе мы укажем некоторые из них.

Число c называется точной верхней гранью (т.в.г.) множества $A \subset \mathbb{R}$, если выполнены два условия: (I) $x \leq c$ для всякого $x \in A$; (2) для всякого $c_1 < c$ найдется $x \in A$, для которого $x > c_1$.

III. Доказать, что (c есть т.в.г. множества A) $\Leftrightarrow$ (c – наименьший элемент в множестве всех верхних границ для A). (Число u – верхняя граница для A, если $x \leq u$ для всех $x \in A$.)

II2. Дать разумное определение точной нижней грани.

II3. Сформулировать, что означает, что x не есть т.в.г. множества A.

II4. Доказать, что I есть т.в.г. множества всех рациональных чисел, меньших I.

II5. Может ли множество иметь две различные т.в.г. ?

II6. Доказать, что если множество имеет наибольший элемент, то он является его т.в.г.

II7. Вывести из аксиомы полноты такое утверждение: всякое ограниченное сверху множество имеет т.в.г. (Ограниченное сверху = имеющее верхнюю границу.) (Указание. Пусть L – данное множество, R – множество его верхних границ.)

II8.* Докажите, что из утверждения предыдущей задачи в свою очередь можно вывести аксиому полноты.

II9.* Доказать, что аксиома Архимеда является следствием аксиомы полноты.

I20.* Доказать, что аксиома существования корня является следствием аксиомы полноты.

I2I. Используя аксиому полноты, доказать следующий принцип вложенных отрезков: если $I_0, I_1, \ldots$ – отрезки на прямой и $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, то существует точка x, принадлежащая всем отрезкам.

I22. Останется ли верным это утверждение, если отрезки заменить интервалами?

I23. Имеется последовательность отрезков, любые 2 из которых имеют общую точку. Доказать, что все они имеют общую точку.

I24. Используя аксиому полноты, доказать, что всякая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.

Эта задача позволяет доказать существование предела, не зная его заранее.

I25. Дать новое доказательство того, что предел последовательности $a: a_n = q^n$ при $0 < q < 1$ равен 0. (Доказать сначала, что он существует.)

I26. Доказать существование и найти предел последовательности $\sqrt{6}$, $\sqrt{6+\sqrt{6}}$, $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$, ...

Напомним, что a называется предельной точкой последовательности $x_0, x_1, \ldots$, если при любом $\varepsilon > 0$ интервал $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ (шар радиуса ε с центром в a) содержит бесконечно много членов последовательности.

I27. Используя аксиому полноты, доказать, что <u>всякая ограниченная последовательность имеет предельную точку</u>. (Указание. Если отрезок содержит бесконечно много членов последовательности, то одна из его половин также обладает этим свойством.)

Аксиома полноты позволяет строго доказать несчетность отрезка.

I28. Доказать, что если $x_0, x_1, x_2, \ldots \in [0,1]$, то существует точка $x \in [0,1]$, отличная от всех x_i. (Указание. Если дан отрезок и точка, то можно найти меньший отрезок, не содержащий этой точки.)

Последовательность действительных чисел называется <u>фундаментальной</u>, или <u>последовательностью Коши</u>, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует отрезок длины ε, являющийся её ловушкой.

I29. Доказать (не используя аксиому полноты), что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

I30. Используя аксиому полноты, доказать <u>критерий Коши</u>: <u>всякая фундаментальная последовательность сходится</u>. (Указание. Построить последовательность вложенных ловушек стремящейся к 0 длины.)

Семейство интервалов называется <u>покрытием</u> множества $A \subset \mathbb{R}$, если всякая точка A содержится хотя бы в одном из них.

I3I. Доказать следующую <u>лемму Гейне – Бореля</u>: <u>из всякого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное подпокрытие</u> (т.е. можно найти конечное число интервалов исходного покрытия, которые покрывают весь отрезок).

I32. Останется ли лемма справедливой, если заменить интервалы отрезками или отрезок интервалом?

133.* Доказать, что лемма Гейне – Бореля останется справедливой, если заменить интервалы открытыми множествами, а отрезок – любым замкнутым ограниченным множеством действительных чисел

134. Будем говорить, что функция f локально ограничена, если для каждой точки x из её области определения найдется такой интервал I, содержащий x, на котором f ограничена (т.е. множество значений f в точках I, в которых она определена, ограничено). Доказать, что локально ограниченная функция, определенная на отрезке, ограничена (т.е. множество её значений ограничено).

135. Последовательность действительных чисел x_n такова, что $|x_{n+1} - x_n| \leq 2^{-n}$. Доказать, что она имеет предел.

136. Последовательность действительных чисел x_n такова, что $|x_n - x_k| < \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$. Доказать, что она сходится. Что можно сказать, если $|x_n - x_k| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k}$?

137.* Говорят, что множество $A \subset \mathbb{R}$ является <u>подгруппой</u> <u>группы</u> $\mathbb{R}$, если из $x, y \in A$ следует $x+y, x-y \in A$. Найти все подгруппы группы $\mathbb{R}$, являющиеся замкнутыми множествами.

Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что дробные части чисел $n\sqrt{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$, попадают в любой интервал, лежащий внутри $[0, 1]$. (Указание. Рассмотреть подгруппу чисел вида $m + n\sqrt{2}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ и её замыкание.)

138.* Доказать, что всякое открытое множество на прямой является объединением счетного множества <u>непересекающихся</u> интервалов.

139.* (1) Доказать, что множество $\mathbb{R}$ не может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств. (2) Какие подмножества $\mathbb{R}$ открыты и замкнуты одновременно?

(Продолжение.) Решить предыдущую задачу, заменив $\mathbb{R}$ на плоскость.

140.* Доказать, что если $A_i \subset \mathbb{R}$ – замкнутые множества и $A_0 \cup A_1 \cup \ldots = \mathbb{R}$, то хотя бы одно из A_i имеет внутреннюю точку.

141.* Можно ли представить множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ как объединение счетного числа замкнутых подмножеств $\mathbb{R}$? Можно ли представить $\mathbb{Q}$ как пересечение счетного числа открытых подмножеств $\mathbb{R}$?

142.* Можно ли представить $\mathbb{R}$ в виде счетного объединения попарно не пересекающихся замкнутых множеств?

143.** Доказать, что несчетное замкнутое множество на прямой имеет мощность континуума. Существенна ли замкнутость?

Ряды

Пусть дана последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots$ Говорят, что она суммируема, или что "ряд $a_0 + a_1 + \ldots$ сходится", если последовательность $S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, $S_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$ имеет предел. Этот предел называют суммой ряда, а S_n – n-ой частичной суммой.

I44. При каких x ряд $1 + x + x^2 + \ldots$ ("бесконечная геометрическая прогрессия") сходится? Найти его сумму.

I45. (Необходимое условие сходимости.) Доказать, что если ряд $x_0 + x_1 + \ldots$ сходится, то его члены стремятся к 0: $\lim x_n = 0$.

I46. (Продолжение.) Верно ли обратное?

I47. Доказать, что ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

I48. (Признак сравнения.) Если $0 \le a_n \le b_n$ при всех n и ряд $\sum b_n$ сходится, то и ряд $\sum a_n$ сходится.

I49. Доказать, что ряд $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$ расходится. (Указание. $1/n+1 + \ldots + 1/2n \ge 1/2$.)

I50. Доказать, что ряд $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots$ сходится и найти его сумму. (Указание. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = ?$)

I5I. Доказать, что ряд $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots$ сходится. (Указание. Сравнить с рядом $\sum 1/n(n-1)$.)

I52.** Доказать, что сумма ряда предыдущей задачи равна $\frac{\pi^2}{6}$.

I53.* Пусть все $a_n \ge 0$, $a_0 \ge a_1 \ge \ldots$ Доказать, что ряды $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ и $1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$ сходятся или расходятся одновременно.

I54.* При каких действительных $p > 0$ ряд $1/1^p + 1/2^p + 1/3^p + \ldots$ сходится? (Указание. Применить предыдущую задачу.)

I55. Доказать, что при произвольной перестановке членов ряда с неотрицательными членами его сходимость и сумма не меняются. (Для произвольных рядов это не так, см. далее!)

I56.* Бесконечная клетчатая бумага заполнена неотрицательными числами. Дать разумное определение "суммы всех чисел, написанных на бумаге".

I57.* Известно, что $a_n > 0$, $a_{n+1}/a_n \to A$. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum a_n$ при различных A?

I58.* Известно, что $a_n > 0$, $\sqrt[n]{a_n} \to A$. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum a_n$ при различных A?

I59.* Из ряда I + I/2 + I/3 + ... выкинули все члены, десятичная запись которых содержит 9. Сходится ли полученный ряд?

I60.* Известно, что a_n , $b_n \geq 0$ и ряды $a_0^2 + a_1^2 + \ldots$ и $b_0^2 + b_1^2 + \ldots$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

I6I.* Известно, что $a_i \geq 0$ и ряд $\sum a_i^2$ сходится. Можно ли утверждать, что ряд $\sum (a_n / n)$ сходится?

I62.* При каких действительных p ряд $\sum \frac{1}{n(\log_2 n)^p}$ сходится?

I63.* Известно, что $a_n > 0$, ряд $\sum a_n$ расходится. Обозначим через S_n сумму $a_0 + \ldots + a_n$. Доказать, что ряды $\sum (a_n/(1+a_n))$ и $\sum (a_n / S_n)$ расходятся, а ряд $\sum (a_n / S_n^2)$ сходится. Что можно сказать о рядах $\sum (a_n/(1+na_n))$ и $\sum (a_n/(1+n^2 a_n))$?

I64.* Известно, что $a_n > 0$, ряд $\sum a_n$ сходится. Обозначим через r_n сумму ряда $a_n + a_{n+1} + \ldots$. Доказать, что ряд $\sum (a_n / r_n)$ расходится, а ряд $\sum (a_n / \sqrt{r_n})$ сходится.

Перейдем теперь к изучению рядов с членами разных знаков.

I65. (Признак Лейбница.) Если $a_0 \geq a_1 \geq \ldots$, все a_i неотрицательны и $\lim a_n = 0$, то ряд $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$ (т.е. ряд с членами a_0 , $-a_1$, a_2 ,...) сходится.

Пример: ряд I - I/2 + I/3 - I/4 ...

I66.** Найти сумму этого ряда. (Ответ: $\log_e 2$, где e - основание натуральных логарифмов.)

I67. При каких x сходится ряд $\sum (x^n/n)$?

I68.** Найти его сумму (если она существует).

I69. (Абсолютная сходимость.) Доказать, что если ряд $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots$ сходится, то и ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ сходится. Если ряд $|a_0| + |a_1| + \ldots$ сходится, то говорят, что $a_0 + a_1 + \ldots$ <u>абсолютно сходится</u>. Таким образом, задача утверждает, что <u>всякий абсолютно сходящийся ряд сходится</u>. (Указание. Воспользоваться критерием Коши.)

I70. Существуют ли сходящиеся, но не абсолютно сходящиеся ряды?

I7I. Доказать, что при перестановке членов абсолютно сходящийся ряд остается абсолютно сходящимся и сумма его не меняется.

Эта задача показывает, что можно говорить об абсолютной сходимости и сумме счетной системы чисел, не указывая порядка её просмотра (например, для чисел, записанных в клетках бесконечной клетчатой бумаги). Хотелось бы, однако, чтобы само определение суммы не упоминало порядка.

Пусть имеется счетное множество карточек, на каждой из которых написано действительное число. Для каждого конечного множества K карточек обозначим через $S(K)$ сумму чисел на всех карточках из K. Будем говорить, что число A является <u>суммой всех чисел на карточках</u>, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное множество карточек M, что для любого набора M', получающегося добавлением к M конечного числа карточек, справедливо неравенство $|S(M') - A| < \varepsilon$:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \exists M\ (\forall M' \supset M)(|S(M') - A| < \varepsilon).$$

В этом случае система чисел, записанных на карточках, называется <u>суммируемой</u>.

I72.* Доказать, что если система суммируема, то, расположив её члены в любом порядке, получим сходящийся ряд, причем его сумма будет равна сумме системы.

I73.* Доказать, что система неотрицательных чисел является суммируемой тогда и только тогда, когда множество всех чисел $S(K)$ для всех конечных K ограничено, и что в этом случае его точная верхняя грань и есть сумма.

I74.* Доказать, что если система чисел такова, что сумма их модулей суммируема, то и исходная система суммируема.

I75.* Дать новое доказательство утверждения о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда, использующее суммируемые системы.

I76.* Для системы действительных чисел суммируемость равносильна суммируемости их модулей. Доказать.

I77.* Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с неотрицательными значениями такова, что для любого конечного набора точек $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ при любом n справедливо неравенство $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \leq 1$. Доказать, что множество тех $x \in \mathbb{R}$, при которых $f(x) \neq 0$, счетно.

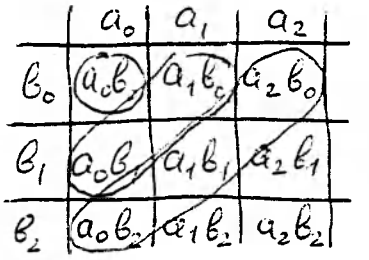
I78. Доказать, что если члены абсолютно сходящегося ряда разбиты на группы, каждая из которых содержит конечное число членов, то ряд, составленный из сумм этих групп, является абсолютно сходящимся и имеет ту же сумму.

I79.* Доказать, что ряд из действительных чисел абсолютно сходится тогда и только тогда, когда ряды, полученные из него вычеркиванием всех положительных или всех отрицательных чисел, сходятся (или имеют конечное число членов).

I80.* Доказать, что если сходящийся ряд не является абсолютно сходящимся, то (I) можно переставить его члены так, чтобы он стал расходящимся; (2) для любого a можно переставить его члены так, чтобы он сходился к a.

I8I.* Существует ли такой сходящийся ряд $\sum a_n$, что ряд $\sum a_n^3$ расходится? Могут ли все его члены быть неотрицательными?

I82.* Пусть $a_0 + a_1 + \ldots$ и $b_0 + b_1 + \ldots$ – два ряда. Назовем их произведением в смысле Абеля ряд $\sum c_i$, где $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_n = a_0 b_n + \ldots + a_n b_0$. Доказать, что если ряды a и b абсолютно сходятся, то и их произведение абсолютно сходится и его сумма равна произведению сумм рядов a и b.



I83.* Доказать, что если один ряд сходится абсолютно, а другой просто сходится, то их произведение сходится и его сумма равна произведению сумм исходных рядов.

I84.* Привести пример двух сходящихся рядов, произведение которых расходится.

I85.** (Абель) Доказать, что если два ряда и их произведение сходятся, то сумма произведения равна произведению сумм.

Преобразование Абеля.

I86.* Пусть $A_0, \ldots, A_N$ и $B_0, \ldots, B_N$ – произвольные числа. Доказать, что

$$A_N B_N - A_0 B_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A_k (B_{k+1} - B_k) + \sum_{k=1}^{N} B_k (A_k - A_{k-1}).$$

(Замечание. $(uv)' = uv' + u'v$, поэтому

$$u(n)v(n) - u(0)v(0) = \int_0^n (uv)' = \int_0^n uv' + \int_0^n u'v.)$$

I87.* Найти с помощью преобразования Абеля сумму $\sum_{k=1}^{n} k x^k$. (Указание. $A_k = k$, $B_{k+1} - B_k = x^k$)

I88.* Доказать, что если последовательность $a_0, a_1, \ldots$ состоит из положительных членов, монотонно убывает и стремится к 0, а частичные суммы ряда $b_0 + b_1 + \ldots$ ограничены, то ряд $a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots$ сходится. (Указание. Взять $A_n = a_n$, $B_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}$ и применить преобразование Абеля.)

I89.* Вывести из предыдущей задачи признак Лейбница.

I90.* Доказать, что ряд $\sum (\sin n / n)$ сходится.

I9I.* Пусть $x_0, \ldots, x_n, \ldots$ – неотрицательные числа. Доказать, что ($\sum x_n$ расходится) $\Leftrightarrow$ (последовательность $P_n = (1 + x_0) \cdot (1 + x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n)$ стремится к $+\infty$).

I92.* Пусть $x_0, x_1, \ldots$ – неотрицательные числа, меньшие I. Доказать, что ($\sum x_n$ расходится) $\Leftrightarrow$ ($P_n = (1 - x_0) \ldots (1 - x_n)$ сходится к 0).

I93.* Доказать, что последовательность $P_n = (1 - \frac{1}{2})^{-1} \cdot (1 - \frac{1}{3})^{-1} \cdot (1 - \frac{1}{5})^{-1} \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_n})^{-1}$ (знаменатели – простые числа) стремится к $+\infty$. (Указание. $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots$)

I94.* Используя предыдущую задачу, доказать, что: (I) простых чисел бесконечно много; (2) ряд I/2 + I/3 + I/5 + ... расходится.

Непрерывные функции

Пусть $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$. Говорят, что f <u>непрерывна в точке</u> $a \in M$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in M$, для которых $|x - a| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

I. Сформулировать, что означает, что f не является непрерывной в точке a.

Отметим, что вопрос о непрерывности функции в точке, не входящей в ее область определения, лишен смысла!

2. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна в точке $x = \frac{1}{2}$; указать δ для $\varepsilon = 2$; $\varepsilon = 0.1$; $\varepsilon = 10^{-20}$.

3. Доказать, что $f: M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in M$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_0, x_1, \ldots$ точек M, сходящейся к a, последовательность $f(x_0), f(x_1), \ldots$ сходится к $f(a)$ (определение непрерывности по Гейне).

Терминология: f разрывна в $a \Leftrightarrow f$ имеет разрыв в $a \Leftrightarrow f$ не является непрерывной в a; f непрерывна $\Leftrightarrow f$ непрерывна всюду $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f$ непрерывна во всех точках своей области определения.

4. Функция Дирихле $\mathcal{D}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена так: $\mathcal{D}(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Q}$, $\mathcal{D}(x) = 0$ при $x \notin \mathbb{Q}$. Исследовать на непрерывность функции $\mathcal{D}$, $x \mapsto x \cdot \mathcal{D}(x)$.

5. Построить функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (I) разрывную в целых точках и непрерывную в остальных; (2) непрерывную в целых точках и разрывную в остальных; (3) разрывную в точках $1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$) и непрерывную во всех остальных.

6. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – возрастающая и взаимно однозначная. Доказать, что f непрерывна.

7. Исследовать на непрерывность функцию Римана R, для которой $R(x) = 0$ при $x \notin \mathbb{Q}$ и $R(p/q) = 1/q$, если p/q – несократимая дробь.

8. Доказать, что монотонная функция имеет конечное или счетное множество точек разрыва.

9. Дано счетное множество $A \subset \mathbb{R}$. Построить монотонную функцию, разрывную во всех точках A и непрерывную во всех остальных.

I0. Доказать, что множество точек разрыва любой функции можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств. (Указание. Точку a назовем точкой разрыва величины ε, если в любом содержащем ее интервале найдутся две точки x, y, для которых $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Множество точек разрыва данной величины замкнуто.)

II. Может ли функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ быть непрерывной во всех иррацио-

нальнальных точках и разрывной во всех рациональных? непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных? (Указание. См. предыдущую задачу.)

I2. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является "поточечным пределом" последовательности непрерывных функций f_n : для любого x последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$. Как считал Коши, отсюда следует, что f непрерывна. Покажите, что это не так!

I3. (Продолжение.) Может ли функция f быть всюду разрывной?

I4. Доказать, что если две непрерывные функции $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ совпадают на множестве $\mathbb{Q}$, то $f = g$.

Операции над непрерывными функциями

I5. Пусть $f, g: M \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a. Доказать, что функции $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ ($(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ и т.п.) непрерывны в a. Если при этом g не обращается в 0 на M, то и f/g непрерывна в a.

I6. Что можно сказать о непрерывности $f+g$ и $f \cdot g$ в точке a, если известно, что (I) ровно одна из функций f и g непрерывна в a; (2) обе функции разрывны в a?

I7. Функция $f: M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a, функция g определена на множестве K, содержащем множество значений f и непрерывна в $f(a)$. Доказать, что функция $g \circ f(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

I8. Доказать непрерывность многочленов. Доказать непрерывность функции $f: x \longmapsto \sqrt{x}$ (в любой точке области определения).

I9. Говорят, что функция f удовлетворяет условию Липшица с константой C, если $|f(y) - f(x)| \leqslant C|y-x|$ для любых x и y из ее области определения. Доказать, что всякая функция, удовлетворяющая условию Липшица, непрерывна.

20. Известно, что $|\sin x - \sin y|$ и $|\cos x - \cos y|$ не превосходит $|x-y|$ (почему?). Доказать непрерывность функций $\sin$ и $\cos$ во всех точках их области определения.

2I. Может ли непрерывная функция $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ не удовлетворять условию Липшица ни с какой константой?

22. Доказать, что если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонна, $f(1/n) \to 0$ и $f(-1/n) \to 0$ при $n \to \infty$, то f непрерывна в 0.

23. Известно, что $a^{x+y} = a^x + a^y$, $a^0 = 1$ и функция $x \longmapsto a^x$ монотонна ($a > 0$, $a \neq 1$). Доказать, что эта функция непрерывна ("непрерывность показательной функции")

О логарифме, степенной и обратных тригонометрических функциях см. далее.

24. (Локальная ограниченность.) Доказать, что если f непрерывна в точке a, то найдется такой интервал, содержащий a, в котором f ограничена.

25. (Сохранение знака.) Доказать, что если f непрерывна в a и $f(a)>0$, то найдется такой интервал, содержащий a, что $f(x)>0$ для всех x из этого интервала (для которых $f(x)$ определен).

Основные теоремы о непрерывных функциях.

26. (Ограниченность.) Функция f, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$, ограничена на нем. (Указание. I. Применить лемму Гейне - Бореля. 2. Если функция не ограничена на отрезке, то она не ограничена на одной из его половин.)

27. (Достижение максимума.) Функция f, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$, имеет точку максимума: существует такое $c\in[a,b]$, что $f(x)\le f(c)$ для всех $c\in[a,b]$. (Указание. Пусть M - точная верхняя грань значений f. I. Если f не принимает значения M, то функция $1/(M-f(x))$ не ограничена. 2. Если $f(x)<M$, то f меньше M и в некотором интервале, содержащем x. 3. У последовательности x_i, для которой $f(x_i)\to M$, есть сходящаяся подпоследовательность.)

28. (Промежуточные значения.) Функция f, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$ и принимающая на его концах значения разных знаков, имеет корень: если $f(a)>0$, $f(b)<0$, то существует $c\in[a,b]$, для которого $f(c)=0$. (Указание. Если f принимает значения разных знаков на концах некоторого отрезка, то одна из половин отрезка также обладает этим свойством.)

29. (Равномерная непрерывность.) Функция $f: M\to\mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для любых $x,y\in M$ из $|x-y|<\delta$ следует $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Доказать, что любая функция, определенная и непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна. (Указание. Пусть x_n и y_n таковы, что $x_n-y_n\to 0$, а $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon$. Выберем из x_n сходящуюся подпоследовательность.)

30. Какие из сформулированных утверждений останутся верными, если заменить отрезок интервалом?

31. Какие из сформулированных утверждений останутся верными, если заменить отрезок замкнутым ограниченным множеством?

32. Известно, что f определена и непрерывна на $[0,1]$, $f(x)>x$ при всех $x\in[0,1]$. Доказать, что найдется такое c, что $f(x)\ge x+c$ при всех $x\in[0,1]$.

33. Для функции f справедливо такое свойство: если p лежит между $f(x)$ и $f(y)$, то оно равно $f(z)$ для некоторого z, лежащего между x и y. Следует ли отсюда, что f непрерывна?

34. Доказать, что если f и g определены и непрерывны на $[0,1]$, причем $f(0)<g(0)$ и $f(1)>g(1)$, то найдется такая точка $x\in[0,1]$, что $f(x)=g(x)$.

35. Доказать, что всякое непрерывное отображение $f: I\to I$ отрезка I в себя имеет неподвижную точку (такую точку x, что $f(x)=x$). Верно ли это для интервала?

36. Не используя аксиому корня, доказать, что уравнение $x^n=a$ имеет положительное решение при любом $a>0$. (Указание. Применить теорему о промежуточном значении.)

Эта задача позволяет вывести аксиому корня из остальных аксиом (включая аксиому полноты).

37. Пусть f - непрерывная строго возрастающая функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Доказать, что f является взаимно однозначным соответствием между $[a,b]$ и $[f(a),f(b)]$ и обратная функция непрерывна.

38. Дать определение обратных тригонометрических функций и доказать их непрерывность.

39. Дать определение логарифма и доказать его непрерывность.

40. Доказать непрерывность степенной функции $x\mapsto x^c$ при произвольном (не обязательно целом) c.

41. Найти все непрерывные функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которых $f(x+y)=f(x)+f(y)$ при всех $x,y\in\mathbb{R}$

42. (Продолжение.) Бывают ли разрывные функции с тем же свойством?

43. Найти все непрерывные функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которых $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ при всех $x,y\in\mathbb{R}$

<u>Общее определение непрерывной функции</u>.

Пусть M, N - метрические пространства, $f: M\to N$, $a\in M$. Говорят, что f непрерывна в a, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех $x\in M$, для которых $\rho_M(x,a)<\delta$, выполнено $\rho_N(f(x),f(a))<\varepsilon$.

44. Сформулировать эквивалентное определение в терминах сходящихся последовательностей и доказать его эквивалентность.

45. Доказать, что следующие свойства функции $f: M\to N$ равносильны: (1) f непрерывна во всех точках M; (2) прообраз любого открытого в N множества открыт в M; (3) прообраз любого замкнутого в N множества замкнут в M.

46. Дать определение непрерывной в точке функции, используя лишь понятие открытого множества. (Эти задачи показывают, что для определения непрерывности достаточно знать лишь, какие множества открыты: этот факт выражают словами "непрерывность - топологическое свойство".)

47. Рассмотрим сложение, вычитание, умножение и деление как функции из множества $\mathbb{R}^2$ пар действительных чисел в $\mathbb{R}$. Доказать, что они непрерывны (на своей области определения).

48. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности композиции непрерывных функций.

49. Можно говорить о непрерывности функций с комплексными аргументами и значениями (рассматривая $\mathbb{C}$ как плоскость). Сформулировать и доказать теорему о непрерывности суммы, произведения, разности и частного для таких функций.

50. Пусть M - метрическое пространство, $A \subset M$. Определим $\rho_A(x)$ (расстояние от точки x до A) как точную нижнюю грань множества $\{\rho(x,y) \mid y \in A\}$. Доказать, что ρ_A - непрерывная функция. Что является множеством ее нулей?

51. Пусть A и B - непересекающиеся замкнутые множества в метрическом пространстве M. Доказать, что существует непрерывная функция $f: M \to \mathbb{R}$, для которой $f(x)=0$ при $x \in A$ и $f(x)=1$ при $x \in B$. Вывести отсюда, что существуют непересекающиеся открытые множества U и V, содержащие A и B соответственно. (Указание. $f = \rho_A/(\rho_A+\rho_B)$, $U=\{x \mid f(x)<1/2\}$, $V=\{x \mid f(x)>1/2\}$.)

52. Будет ли площадь треугольника ABC непрерывной функцией от координат его вершин (т.е. из $\mathbb{R}^6$ в $\mathbb{R}$)?

53. Функция $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такова, что для любого $a \in \mathbb{R}$ функции $x \mapsto f(a,x)$ и $x \mapsto f(x,a)$ непрерывны. Можно ли утверждать, что f непрерывна (всюду)?

54. (Продолжение.) Может ли функция f быть всюду разрывной?

55. Функция $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такова, что для любой прямой ℓ на плоскости $\mathbb{R}^2$ сужение f на ℓ (т.е. функция, определенная только на ℓ и принимающая те же значения, что и f) непрерывна. Можно ли утверждать, что f непрерывна?

56. Функция f определена на некотором замкнутом множестве $A \subset \mathbb{R}$ и непрерывна на нем. Доказать, что ее можно так доопределить в точках $\mathbb{R} \setminus A$, чтобы она стала непрерывной на всем $\mathbb{R}$.

57. Решить предыдущую задачу для произвольного замкнутого подмножества произвольного метрического пространства (теорема Титце).

58. Последовательность функций $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. Доказать, что функция $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ всюду определена и непрерывна.

Метрические пространства: полнота и компактность

Задачи этого задания, к сожалению, более абстрактны, чем хотелось бы. Однако они весьма важны.

Полнота

Превращая различные свойства $\mathbb{R}$ в требования к произвольному метрическому пространству, получаем полезные обобщения. Начнем с критерия Коши.

Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ точек метрического пространства называется фундаментальной, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует шар радиуса ε, являющийся её ловушкой.

I. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

2. Доказать, что обратное верно не всегда, приведя пример метрического пространства и фундаментальной, но не сходящейся последовательности в нем. (Указание. Пространство $=]0, 1[$, $x_n = 1/n$.)

3. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность, содержащая сходящуюся подпоследовательность, сходится.

Пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится, называется полным.

4. Будет ли полным пространство $\mathbb{R}$ (I) с обычной метрикой;
(2) с метрикой $\rho(x,y) = \min(|x-y|, 1)$;
(3) с метрикой $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$?

5. Доказать, что плоскость $\mathbb{R}^2$ (с обычной метрикой) полна.

6. Пусть $x_0, x_1, \ldots$ последовательность точек полного пространства, причем $\rho(x_n, x_{n+1}) \leq 1/2^n$. Доказать, что она сходится.

7. Известно, что в метрическом пространстве всякая последовательность x, для которой $|x_n - x_{n+1}| \leq 1/2^n$, сходится. Можно ли утверждать, что оно полно?

8. Диаметром $diam(A)$ множества A в метрическом пространстве M называется $\sup\{\rho(x,y) \mid x, y \in A\}$ (Возможно, $diam(A) = +\infty$.) Доказать, что если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ – убывающая последовательность замкнутых множеств полного пространства, причем $diam(A_i) \to 0$, то существует точка x, принадлежащая всем A_i.

9. Доказать, что верно и обратное: из утверждения предыдущей задачи вытекает полнота.

I0. (Теорема Бэра.) Если полное пространство M покрыто счетным числом замкнутых множеств A_i (т.е. $M = A_0 \cup A_1 \cup \ldots$), то одно из A_i имеет внутреннюю точку.

Пусть A – подмножество метрического пространства M. Его можно рассматривать как метрическое пространство с метрикой, заимствованной (индуцированной) из M.

II. Доказать, что если A полно в индуцированной метрике, то

A замкнуто в M.

I2. Доказать, что замкнутое подмножество полного пространства полно (в индуцированной метрике).

I3. Доказать, что произведение двух полных метрических пространств полно.

I4. Пусть X - произвольное множество. Рассмотрим множество $Огр(X)$ ограниченных действительных функций на X как метрическое пространство, положив $\rho(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\}$ Доказать, что оно полно.

I5. (Продолжение.) Останется ли утверждение предыдущей задачи верным, если X - метрическое пространство и мы рассматриваем не все ограниченные функции, а только непрерывные?

I6. (Теорема о пополнении.) Доказать, что для всякого метрического пространства M можно построить полное пространство $\overline{M} > M$, метрика в котором продолжает исходную метрику на M. (Указание. (I вариант) Элементами $\overline{M}$ будут классы эквивалентных фундаментальных последовательностей в M. (2 вариант) Использовать задачу I4.)

Компактность

Следующим свойством, превращаемым в требование, будет свойство Гейне - Бореля.

Метрическое пространство M называется компактным, если всякое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. Здесь открытым покрытием называется семейство открытых множеств, объединением которых является M, а подпокрытием - любое подмножество, также являющееся покрытием.

I7. Пусть a - точка компактного пространства M. Доказать, что при достаточно большом N шар с центром в a радиуса N совпадает со всем M. (Указание. Шары с центром в a натуральных радиусов образуют покрытие.)

I8. Доказать, что всякая локально ограниченная (в частности, непрерывная) функция с действительными значениями на компактном пространстве ограничена.

I9. Доказать, что всякая непрерывная функция с действительными значениями на компактном пространстве достигает наибольшего и наименьшего значения.

Пусть M - метрическое пространство, $A \subset M$. Говоря о компактности A, имеют в виду его компактность как метрического пространства с индуцированной метрикой. Чтобы осознать это определение, нужно понять, какие подмножества A будут открыты в индуцированной метрике.

20. Доказать, что если U открыто в M, то $A \cap U$ открыто в A.

21. Доказать, что верно и обратное: если V – открытое в A множество, то существует такое открытое в M множество U, что $V = A \cap U$. (Указание. Открытое множество – объединение шаров.)

Эти факты позволяют переформулировать определение компактности: множество $A \subset M$ компактно, если всякое семейство открытых в M множеств, покрывающее A (т.е. объединение которых содержит A) содержит конечное подсемейство с тем же свойством.

22. Доказать, что это определение эквивалентно старому.

23. Доказать, что всякое компактное подмножество A пространства M замкнуто. (Указание. Пусть $x \notin A$. Для каждой точки $a \in A$ рассмотрим непересекающиеся шары U_a и V_a с центрами в x и a соответственно. Семейство U_a – покрытие A.)

24. Доказать, что всякое замкнутое подмножество компактного пространства компактно. (Указание. Добавив к покрытию подмножества его дополнение, получим покрытие всего пространства.)

25. Какие подмножества $\mathbb{R}$ компактны?

26. Пусть A и B – подмножества метрического пространства M. Определим $d(A,B)$ как $\inf \{\rho(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ (Очевидно, при $A \cap B \neq \emptyset$ имеем $d(A,B) = 0$.) Доказать, что если A и B не пересекаются, замкнуты и одно из них компактно, то $d(A,B) > 0$. Все ли требования существенны?

27. Доказать, что если $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ – непустые замкнутые подмножества компактного пространства M, то существует точка, принадлежащая всем A_i. (Указание. Перейти к дополнениям.)

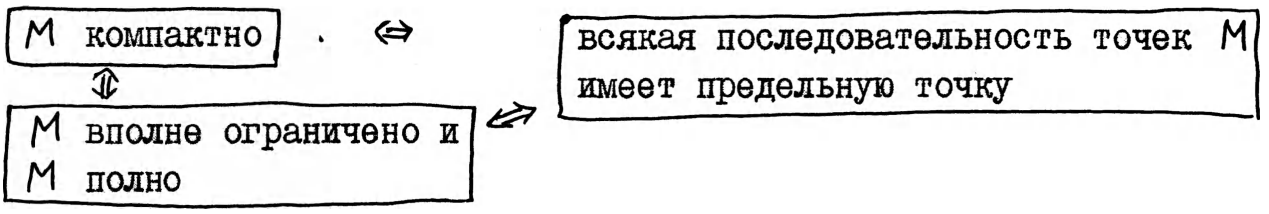
28. Доказать, что всякая последовательность точек компактного пространства имеет предельную точку (и, следовательно, сходящуюся подпоследовательность). (Указание. Если никакая точка не является предельной, то возникает открытое покрытие из окрестностей, содержащих конечное число членов.)

29. Доказать, что всякое компактное пространство полно.

Конечное множество S точек метрического пространства называется ε-сетью ($\varepsilon > 0$), если шары радиуса ε с центрами в точках S образуют покрытие.

30. Доказать, что всякое компактное метрическое пространство вполне ограничено: для любого $\varepsilon > 0$ существует (конечная) ε-сеть. (Как бы ни был слаб фонарь, для освещения компактного пространства достаточно конечного числа фонарей.)

Следующие свойства метрического пространства M равносильны:



Кое-что уже доказано; сейчас мы докажем остальное.

31. Доказать, что если в M всякая последовательность имеет предельную точку, то M вполне ограничено.

32. Доказать, что если в M всякая последовательность имеет предельную точку, то M полно.

33. Доказать, что если M вполне ограничено, $\varepsilon > 0$, то из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, целиком лежащую в некотором шаре радиуса ε.

34. Доказать, что если M вполне ограничено, то всякая последовательность имеет фундаментальную подпоследовательность. (Указание. Применяя предыдущую задачу, построить последовательности, лежащие во все меньших шарах, а затем "диагональную" последовательность, взяв из i-ой последовательности i-ый член.)

Из этой задачи следует, что если M полно и вполне ограниченно, то всякая последовательность в M имеет сходящуюся подпоследовательность (и, следовательно, предельную точку). Таким образом, мы видим, что свойства "всякая последовательность в M имеет предельную точку" и "M полно и вполне ограничено" равносильны и вытекают из компактности. Осталось доказать обратное. Мы сделаем это двумя способами.

35. (Лемма Лебега.) Доказать, что если в пространстве всякая последовательность имеет предельную точку, то для всякого открытого покрытия существует такое $\varepsilon > 0$, что любой шар радиуса ε целиком содержится в одном из множеств покрытия. (Указание. Если для это не так и x_i - центры соответствующих шаров, то последовательность x не имеет предельной точки.)

36. Доказать, что если всякая последовательность имеет предельную точку, то пространство компактно, используя предыдущую задачу и утверждение о полной ограниченности (задача 31).

Прежде чем указать другой способ доказательства этого факта, отметим, что лемма Лебега интересна и сама по себе.

37. Доказать теорему о равномерной непрерывности непрерывной на отрезке (или на произвольном компакте) функции, используя лемму Лебега.

Обещанный второй способ доказательства использует понятие сепарабельности. Мы видели ("Математический анализ", задача 99), что всякое пространство, в котором любая последовательность имеет предельную точку, сепарабельно. (На самом деле достаточно полной ограниченности.) Две следующие задачи завершают доказательство.

38. Доказать, что из любого открытого покрытия сепарабельного пространства можно выбрать конечное или счетное подпокрытие. (Указание. Воспользоваться определением сепарабельности в терминах открытых множеств.)

39. Доказать, что если в M всякая последовательность имеет предельную точку, то из всякого счетного покрытия можно выбрать конечное. (Указание. Если $U_0, U_1, \ldots$ – счетное покрытие и $x_n \notin U_0 \cup \ldots \cup U_n$, то последовательность x не имеет предельной точки.)

40. Доказать, что произведение двух компактных пространств компактно.

41. Доказать, что любое подмножество вполне ограниченного метрического пространства вполне ограничено (в индуцированной метрике).

42. Какие подмножества плоскости компактны?

43. Две метрики эквивалентны, если в них открыты одни и те же множества. Сохраняются ли свойства (1) компактности; (2) полноты; (3) полной ограниченности при замене метрики на эквивалентную?

Непрерывность и компактность.

44. Пусть X, Y – метрические пространства, $f: X \to Y$ – непрерывная функция и X компактно. Доказать, что $f(X)$ компактно. (Указание. Как определяется непрерывность в терминах открытых множеств?)

45. Вывести из предыдущей задачи утверждение о том, что непрерывная на компакте функция с действительными значениями достигает минимума и максимума.

46. Пусть $f: X \to Y$ непрерывное взаимно однозначное отображение метрических пространств, причем X компактно. Доказать, что обратное отображение непрерывно. Существенна ли компактность? (Указание. Доказать, что образ замкнутого множества при f замкнут.)

47. Дано компактное выпуклое множество точек плоскости и точка, в нем не лежащая. Доказать, что можно провести прямую, по одну сторону от которой лежит точка, а по другую – множество.

48. Рассмотрим метрическое пространство непрерывных на отрезке функций с метрикой $\rho(f, g) = \sup_t \{|f(x) - g(x)|\}$. Описать компактные подмножества этого пространства. (Ответ. Они должны быть: (1) замкнуты; (2) равномерно ограничены (все функции – одной константой); (3) равностепенно непрерывны (для каждой точки отрезка существует окрестность, в которой все функции подмножества мало колеблются).)

задачи по физике

I. Все тела при нагревании расширяются. Как изменится внутренний диаметр кольца при нагревании?

2. Имеется шаровое скопление галактик. Астроном, галактика которого находится в центре скопления, наблюдает, что за год все галактики становятся в 2 раза дальше от него (а направления на них не меняются). Что видит астроном с периферийной галактики?

3. Один металлический шар прикреплен к потолку, другой точно такой же - к полу. Пол и потолок сделаны из теплоизолирующего материала, влиянием окружающего воздуха можно пренебречь. Какой шар имеет большую теплоемкость?

4. Четыре собаки, сидящие в вершинах квадрата со стороной A, одновременно бросаются друг на друга, при этом каждая бежит в направлении следующей со скоростью v. Когда они встретятся?

5. По прямой едет автобус со скоростью v_1, человек может бегать со скоростью $v_2 < v_1$. Из каких точек плоскости имеет смысл бежать за автобусом? (Если его догнать, он остановится.)

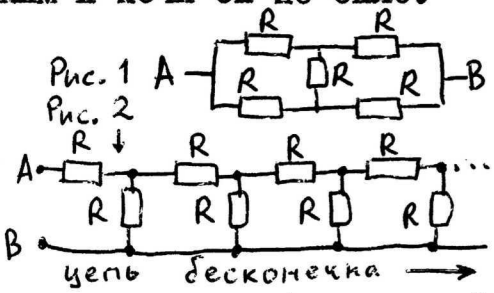
6. Допустим, что все линейные размеры человеческого тела увеличились в C раз. Какой максимальный груз сможет поднять человек? (Построить примерный график его зависимости от C)

7. Докажите, что если бы Вселенная представляла собой бесконечное пространство, равномерно заполненное неподвижными звездами, то любой участок неба был бы чрезвычайно ярким и ночи бы не было.

8. Найти сопротивление между точками A и B (рис. I).

9. То же для рис. 2.

I0. Сопротивление провода, из которого сделана бесконечная сетка на рис. 3, таково, что участок провода между узлами сетки имеет сопротивление I Ом. Найти сопротивление между точками A и B.



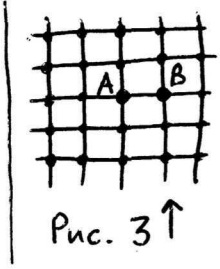


Рис. 3

II. Как с помощью вольтметра, амперметра и батареи найти сопротивления $R1$, $R2$ и $R3$, не выпаивая их из схемы? (Рисунок в низу стр.)

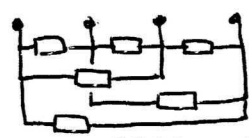
I2. На озере лед толщиной I м. В нем просверлили лунку. На какой глубине будет в ней вода?

I3. Согласно гипотезе, изложенной в "Гиперболоиде инженера Гарина", под землей имеются области, наполненные расплавленным золотом (подобные месторождениям нефти). Предлагается пробурить скважину и добывать это золото так же, как нефть (разумеется, подогревая скважину, чтобы оно не застыло). Удастся ли это?

I4. Имеются два баллона. Один из них наполнен гелием под давлением I00 атмосфер, другой пустой (т.е. наполнен воздухом). Придумать простой способ переместить весь гелий в другой баллон, не смешивая его с воздухом.

I5. Имеется проволочный куб, каждое его ребро имеет сопротивление I Ом. Найти сопротивление между вершинами куба. (Рассмотреть все варианты.)

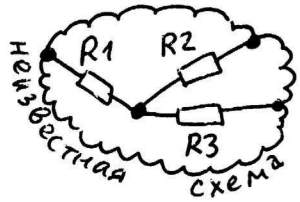
I6. Имеется n клемм. Всякая пара клемм соединена между собой сопротивлением в I Ом. Найти сопротивление полученной цепи между двумя клеммами.



I7. Трехлопастной вентилятор вращается со скоростью 2000 об/мин и освещен люминесцентной лампой. Какова кажущаяся скорость его вращения? (Частота сети - 50 герц)

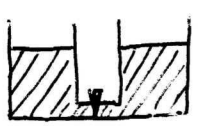
I8. Точка движется по прямой и за любой промежуток времени в I мин проходит ровно I м. Можно ли утверждать, что она движется равномерно?

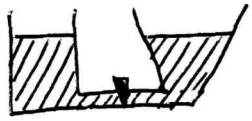
I9. Что тяжелее: ящик мелкой дроби или такой же ящик крупной дроби?



з а д а ч и п о ф и з и к е - 2

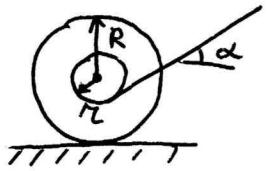
20. Из трубок частично удален воздух. Начнет ли вода течь, если открыть кран?





21. В двух сообщающихся сосудах была вода. Кран закрыли и один из сосудов нагрели. Начнет ли вода течь, если открыть кран?

22. Металлический шарик бросили с большой высоты на металлическую плиту. К моменту удара шарик летел примерно с постоянной скоростью (из-за сопротивления воздуха). Удар упругий. Найти ускорение шара в первый момент после удара.



23. Катушку наружного радиуса R и внутреннего радиуса r тянут за нитку под углом α. При малых α она покатится в ту сторону, в которую её тянут, при больших α – в противоположную. Объясните это и найдите граничное значение α.

24. Придумать способ, позволяющий зажигать и гасить лампу в коридоре из любого его конца.

25. Как определить высоту дерева в солнечный день при помощи линейки?

26. Вагон едет под дождем. Скорость его увеличилась. Как изменилось количество воды, попадающее на его плоскую крышу. (Сила дождя не меняется.) А если крыша не плоская?

27. В металлическом шаре имеется полость. Как определить, находится ли она в центре шара или нет?

28. Имеются два одинаковых бруска, один из них намагничен. Как определить, какой именно, не пользуясь ничем, кроме этих брусков?

29. Как Вы думаете, какова скорось падающих дождевых капель при обычном дожде? Какое из значений – 1 м/с, 10 м/с, 100 м/с – более правдоподобно? Объясните Ваш ответ.

30. Как Вы думаете, почему в природе не встречаются кристаллы, некоторые грани которых – правильные пятиугольники?

31. Для защиты самолета сзади было предложено установить в хвосте самолета реактивный снаряд. При испытаниях оказалось, что снаряд через некоторое время после пуска разворачивался и догонял самолет. Почему?

32. В закрытом фургоне на полу лежит арбуз, а у потолка летает воздушный шарик. Что произойдет с ними, если фургон резко затормозит?

33. В елочной гирлянде на каждую лампочку приходится совсем небольшое напряжение (несколько вольт), но если лампочку вывинтить и сунуть в патрон палец (советуем не пробовать!), то сильно дернет. Почему?

34. Вы видели, как молния ударила в далекое дерево и слышали гром. Как найти расстояние до этого дерева?

35. Тени от далеких предметов имеют размытые края. Почему? Как выглядит тень далекого шара?

36. Почему днем тюлевая занавеска не мешает смотреть из комнаты на улицу, но мешает увидеть с улицы внутренность комнаты?

37. В чем разница между быстрой ходьбой и медленным бегом?

38. Два одинаковых ведра наполнены до краев водой. В одном из них плавает деревяшка. Какое ведро тяжелее?

39. Как отличить сырое яйцо от вареного, не разбивая их?

Избранные задачи по физике

I. Разное

I.I. Два одинаковых удава начинают заглатывать друг друга с хвоста, пока не проглотят все, что смогут. Чем это кончится? (Нарисовать это в различных разрезах.)

I.2. Квадратный кекс с изюмом размером $d \times d$

разрезали ножом на две раные прямоугольные части. Нож разрезал n изюминок. Оцените возможно точнее общее число изюминок. (Тесто хорошо перемешано.)

I.3. Как изменится число дней в году, если Земля начнет вращаться вокруг Солнца в другую сторону (с той же скоростью; вращение вокруг своей оси остается неизменным)?

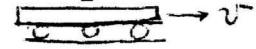
I.4. Почему провод трамвайной линии натянут зигзагом, а не параллельно рельсам?

I.5. Биолог выловил из пруда 20 рыб, пометил и отпустил обратно. Через месяц он вновь выловил 20 рыб, из них 4 оказались мечеными. Оценить число рыб в пруду.

I.6. С помощью камеры-обскуры с отверстием I мм снимают тигра с полосами шириной 20 см. Подходить к нему ближе чем на 20 м опасно. Какого размера должна быть камера, чтобы тигр на снимке вышел полосатым?

2. Равномерное движение по прямой.

2.I. Проплывая под мостом, человек потерял шляпу. Через 20 мин. он спохватился, поплыл обратно и нагнал её в 2 км от моста. Определить скорость течения.

2.2. Тележка на катках движется равномерно со скоростью v. С какой скоростью движутся оси катков? 

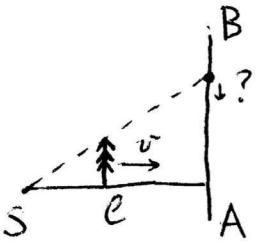
2.3. Человек высоты h идет со скоростью v под фонарем, висящим на высоте H. С какой скоростью движется тень его макушки?

2.4. Два человека вышли из А в Б. Первый шел половину времени со скоростью v_1, половину - со скоростью v_2. Второй шёл половину пути со скоростью v_1, а половину - со скоростью v_2. Кто пришел раньше?

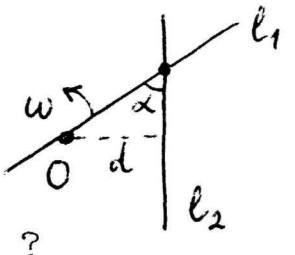
2.5. Идя навстречу трамваям, пешеход встречает их каждые 5 мин., повернув обратно - каждые 7 минут. Как часто он будет встречать их, стоя на месте? (Пешеход и трамваи движутся с постоянной скоростью, трамваи - с одинаковыми интервалами.)

3. Мгновенная скорость.

3.1. Точечный источник света S находится на расстоянии ℓ от вертикального экрана AB. От источника к экрану движется поступательно с постоянной скоростью v непрозрачный предмет высоты h. Определить мгновенную скорость перемещения верхнего края тени по экрану.



3.2. Прямая ℓ_1 равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг точки O, отстоящей от прямой ℓ_2 на расстояние d. Чему равна скорость точки пересечения прямых в тот момент, когда угол между прямыми равен α?



3.3. Шарик подскакивает на пластинке (удары упругие, и он поднимается до одной и той же высоты). Построить графики зависимости координаты, скорости и ускорения от времени.

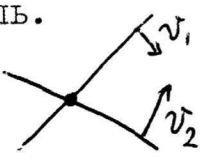
4. Скорость как вектор.

4.1. Человек, идя с мешком муравьёв со скоростью v, рассыпает их на землю, где они разбегаются во все стороны со скоростью $w < v$. Какую часть плоскости занимают муравьи?

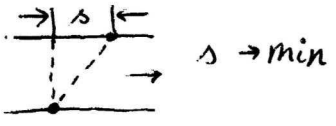
4.2. Дороги пересекаются под прямым углом. Два автобуса, едущие по ним со скоростью 60 км/час, проехали перекресток с интервалом в 1 ч. Каково наименьшее расстояние между автобусами?

4.3. При движении поезда в безветренную погоду со скоростью 20 м/с капли дождя оставляют на стекле следы под углом 30° к вертикали. Найти скорость падения дождевых капель.

4.4. Две пересекающиеся прямые движутся параллельно самим себе со скоростями v_1 и v_2. Куда и с какой скоростью движется точка их пересечения?

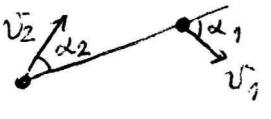


4.5. Лодка со скоростью 1 м/с пересекает реку, скорость течения в которой 2 м/с. Гребец хочет, чтобы лодку снесло течением как можно меньше. Куда нужно плыть? На сколько снесет лодку?



4.6. Может ли водный лыжник двигаться быстрее катера? Может ли катер двигаться быстрее лыжника? (Быстрее = с большей длиной вектора скорости.)

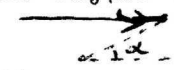
4.7. Расстояние между движущимися точками постоянно. Как связаны $v_1, v_2, \alpha_1, \alpha_2$?



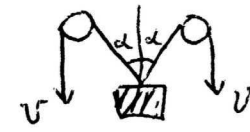
4.8. Четыре корабля A, B, C и Д плывут в тумане с постоянными скоростями и прямолинейными курсами. Корабли A и B чуть не столкнулись; назовем это событие "столкновением". Известно, что произошли "столкновения" A – B, A – C, A – Д, B – C, B – Д, причем в одно и то же время "столкнулось" не более 2 кораблей. Доказать, что если скорости кораблей C и Д различны, то они тоже "столкнутся".

4.9. Имеется шаровое скопление галактик. Астроном, галактика которого находится в центре скопления, наблюдает, что галактики удаляются от него со скоростями, пропорциональными расстоянию до них. Что видят астрономы с периферийной галактики?

4.10. Над нами летит самолет со скоростью v. В данный момент он виден под углом α. Откуда слышен звук? (Скорость самолета может быть и сверхзвуковой.)



4.11. Рабочие, поднимающие груз, тянут за канаты с равными скоростями v. Какова скорость груза в тот момент, когда угол между канатами равен 2α?



4.12. Лестница длины L падает. Какую скорость имеют её середина и нижний конец, если скорость верхнего конца равна v, а угол с поверхностью земли – α?

4.13. Четыре собаки, сидящие в вершине квадрата со стороной L, одновременно бросаются друг на друга, при этом каждая бежит в направлении следующей со скоростью v. Когда и где они встретятся?

4.14. (Продолжение.) Тот же вопрос для трех собак, сидящих в вершинах равностороннего треугольника со стороной L.

4.15. Со сверхзвукового самолета излучают два импульса звука: сильный, а затем слабый. Может ли наблюдатель услышать слабый импульс раньше сильного?

4.16. Два дельфина плывут со скоростями v_1 и v_2. Один излучает ультразвук с частотой ν импульсов в секунду. С какой частотой принимает их второй?

4.17. От берега отплыли два корабля с одинаковой и постоянной по величине скоростью. Один из них движется перпендикулярно берегу, а другой – в направлении первого. Каково предельное расстояние между кораблями (через большой промежуток времени), если вначале расстояние между ними было равно d?

5. Баллистика.

5.1. По какой траектории должен лететь самолет, чтобы пассажиры ощущали состояние невесомости? Как долго это может продолжаться? Во всем ли салоне создается невесомость?

5.2. На какую максимальную высоту может быть подброшена грязь с колес автомобиля, движущегося со скоростью v ? С каким интервалом должны идти две машины, чтобы передняя не забрызгала заднюю?

5.3. Как следует расположить щитки на колесах велосипеда, чтобы предохранить велосипедиста от грязи?

5.4. Какую область пространства можно обстреливать из пушки, сообщающей снаряду скорость v ?

5.5. Куда надо целиться, чтобы попасть в яблоко, которое в момент выстрела оторвалось от ветки?

6. Ускорение как вектор.

6.1. Пассажиры самолета не испытывают неудобств, если ускорение не превосходит $2g$. Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении допускает самолет?

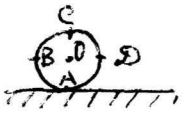
6.2. За лисой, бегущей равномерно и прямолинейно со скоростью v_1 , гонится собака, скорость которой равна v_2 и направлена на лису. В момент, когда скорости v_1 и v_2 были перпендикулярными, расстояние между собакой и лисой было r . Найти ускорение собаки в этот момент.

7. Вращение.

7.1. На сколько и в какую сторону отклонится от вертикали камень, упавший с высоты h на экваторе? Можно ли с помощью этого опыта доказать вращение Земли?

7.2. Два дуэлянта стоят на вращающейся платформе: один в центре, а другой на расстоянии R от него. Куда они должны целиться, если хотят попасть друг в друга? (Угловая скорость вращения платформы ω .)

7.3. С какой скоростью движутся точки А,В,С,Д если скорость O равна v и проскальзывания нет ?



7.4. Какие точки поезда движутся в обратную сторону?

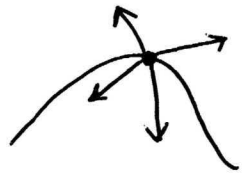
7.5. По вращающемуся диску проводят карандашом от края к центру; скорость карандаша направлена к центру и равна по величине скорости точек диска в месте касания. Найти длину кривой на диске и время, за которое она будет начерчена. Радиус - R , угловая скорость - ω .

8. Ускорение.

1. (I) Точка движется по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью ω. Найти её скорость и ускорение. Нарисовать (на одном чертеже) графики зависимости от времени проекций её скорости и ускорения на оси координат.

2. Тангенциальным и нормальным ускорениями точки называются проекции её ускорения на направления, параллельное и перпендикулярное её вектору скорости. Найти тангенциальное и нормальное ускорения камня, застрявшего в протекторе колеса радиуса R автомобиля, движущегося со скоростью v.

(3) Может ли ускорение точки, движущейся по нарисованной кривой, быть направлено в указанные стороны?

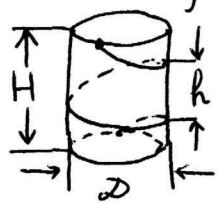


4. Четыре собаки, находясь в вершинах квадрата, гонятся друг за другом (каждая бежит в направлении следующей с постоянной скоростью v). Найти их ускорение, если расстояние между соседними собаками равно a.

9. Законы Ньютона.

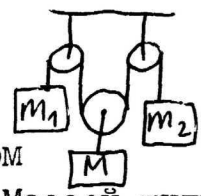
I. Найти разницу давлений на переднюю и заднюю стенки бензобака автомобиля, тормозящего с ускорением a. Бензобак имеет форму куба со стороной L и полон бензина плотности ρ.

2. Найти время спуска саней по винтовому желобу.

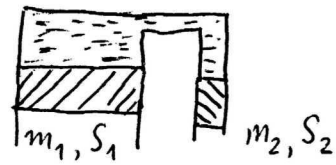


3. Найти ускорение клина (трения нет).

4. Найти ускорения тел и натяжения нитей, если $m_1 + m_2 = M$



5. Найти направления движения и ускорения в перевернутом гидравлическом прессе. Сечения и массы поршней даны. Массой жидкости пренебречь.



6. Две обезьяны одинакового веса неподвижно висят на канате, перекинутом через блок. Одна из них полезла вверх. Какая из них раньше достигнет блока? (Массой блока, каната и трением пренебречь.)

7. Будем считать (в этой и следующей задачах), что сила трения лодки о воду пропорциональна скорости лодки относительно воды. Лодке сообщили скорость v. Когда она прошла путь S, её скорость уменьшилась вдвое. Какой путь она пройдет до остановки?

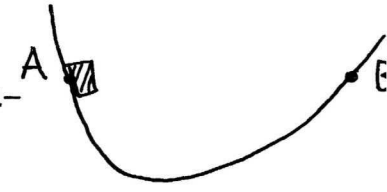
8. Человек сидел в неподвижной лодке. Затем он встал и начал ходить вдоль неё, при этом лодка начала двигаться. После этого он сел и дождался остановки лодки. Доказать, что лодка осталась в первоначаль-

ном положении (хотя человек и сместился!).

9. В кубик из пенопласта массы 100 г, стоящий на тонкой подставке из того же материала, закрепленной неподвижно, попала летящая снизу пуля. Она пробила подставку и кубик. Масса пули 10 г, скорость до - 100 м/с, после - 95 м/с. Подпрыгнет ли кубик?

10. Стальной шарик падает в воздухе с очень-очень большой высоты на стальную плиту. Найти его ускорение сразу после удара. (Столкновение считать упругим: потери в скорости нет.)

11. Тело съезжает (без начальной скорости) из точки A, поднимается до точки B и возвращается обратно в A. Что займет больше времени: путь из A в B или обратно?



12. Мяч массой 300 г, движущийся со скоростью 10 м/с, сталкивается со стенкой и отскакивает от неё. Оценить силу взаимодействия, если время столкновения - порядка 0.1 секунды.

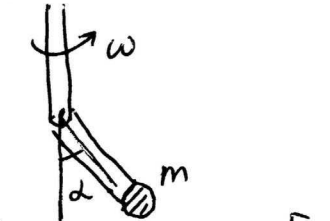
13. Оценить время столкновения и силу взаимодействия 2 стальных шариков радиуса 2 см, налетающих друг на друга со скоростью 1 м/с. (Указание. Скорость звука в стали имеет порядок тысяч метров в секунду

14. Почему дверь можно открыть и нельзя пробить пальцем, но можно пробить и нельзя открыть пулей?

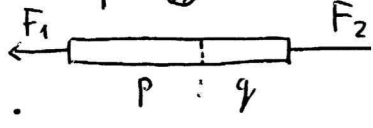
15. На весах стоит стакан, на дне которого сидит муха. Она вылетает из стакана и улетает прочь. Изменится ли показание весов? В какой момент?

16. По кольцевому резиновому шлангу длины L и диаметра d течет вода плотности ρ со скоростью v. Найти натяжение шланга.

17. Тело массы m на жесткой и невесомой палке длины l подвешено на шарнире (допускающем вращение вокруг одной оси) к вертикальной палке, которая вращается с угловой скоростью ω. Найти угол отклонения нижней палки от вертикали.



18. Однородный стержень тянут за концы с силами F_1 и F_2. Найти силу, с которой растянут стержень в точке, делящей его в отношении $p:q$.

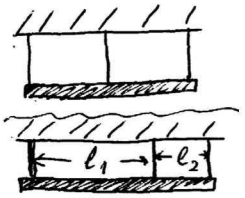


19. Тело, брошенное в воздухе, в наивысшей точке траектории испытывает силу сопротивления воздуха, равную F. Куда направлено ускорение тела в этот момент, если его масса равна m?

20. Старинная пушка, не имеющая противооткатного устройства, стоит на горизонтальной площадке и стреляет ядром массы m со скоростью v, направленной под углом α. Коэффициент трения между пушкой и площадкой k. Найти скорость пушки непосредственно после выстрела. Масса пушки M много больше массы ядра, ускорение ядра в стволе много больше ускорения свободного падения.

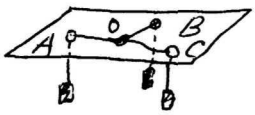
IO. Статика.

I. Дан произвольный многогранник. Для каждой грани построим вектор, перпендикулярный грани, направленный наружу многогранника и равный по длине площади грани. Доказать, что сумма этих векторов равна 0. (Указание. Заполните многогранник газом.) Сформулируйте и докажите чисто геометрически аналогичное утверждение для много - угольников.



2. Однородная балка массы m подвешена за концы и середину на трех нерастяжимых нитях одинаковой длины. Что можно сказать относительно натяжения этих нитей?

3. Тот же вопрос, если она подвешена иначе:

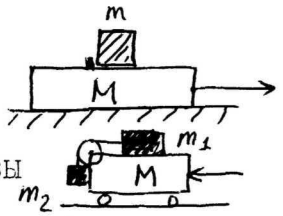


4. В столе сделаны три дырки в точках A, B, C, через них пропущены три веревки, связанные узлом O, к веревкам прикреплены три одинаковых груза. Доказать, что в положении равновесия углы AOB, BOC, AOC равны 120°.

5. (Продолжение.) Дан треугольник ABC. Как найти точку O, для которой $AO+BO+CO$ минимально?

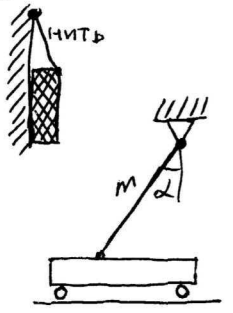
6. Веревка длины $2l$ подвешена за концы в точках A и B. К тем же точкам прикреплены 2 стержня длиной l. Центр тяжести чего ниже: веревки или стержней?

7. Существует ли выпуклый многогранник и точка, расположенная внутри него, проекция которой на любую грань лежит вне этой грани?



8. С какой силой нужно тянуть за веревку, чтобы кубик слетел, если маленький гвоздик мешает ему съехать? (Трения нет.)

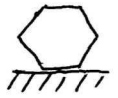
9. С какой силой нужно толкать тележку, чтобы грузы m_1 и m_2 были в равновесии? (Трения нет.)



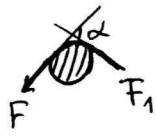
IO. Может ли система находиться в равновесии? (Трения нет.)

II. На тележку одним концом опирается однородная палка массы m, закрепленная другим концом в шарнире и образующая угол α с вертикалью. Какая сила требуется, чтобы сдвинуть тележку в ту и другую сторону, если коэффициент трения палки о тележку равен k?

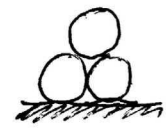
I2. Карандашу, лежащему на столе, сообщили скорость, перпендикулярную оси карандаша и параллельную столу. Покатится он или будет скользить, если коэффициент трения между карандашом и столом равен k?



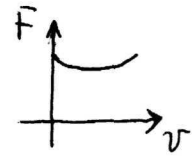
I3. Почему катящийся обруч останавливается?

I4. Коэффициент трения между веревкой и столбом равен k. 

с какой силой нужно тянуть за правый конец веревки, чтобы веревка не скользила, если за левый конец тянут с силой F ? (Ответ: $F_1 \in [Fe^{-k\alpha}, Fe^{k\alpha}]$; $e = 2.7I828...$)

I5. При каком коэффициенте трения между бревнами два лежащих рядом на земле бревна раскатятся, если между ними положить третье? (Радиусы бревен одинаковы, земля абсолютно шероховатая.) 

I6. На плоскости лежит груз, который тянут за веревку под углом α. При каком α сила, необходимая для того, чтобы сдвинуть груз, будет минимальной? Коэффициент трения между грузом и плоскостью равен k.

I7. Почему колеблется скрипичная струна, когда по ней равномерно ведут смычком? (Указание. Зависимость силы трения от скорости при постоянной прижимающей силе имеет примерно указанный на рисунке вид.) 

I8. Положите палку на указательные пальцы обеих рук. Медленно сближайте их. Почему палка не падает?

I9. Придумайте простой эксперимент, позволяющий измерить отношение силы трения покоя к силе трения скольжения, имея из измерительных приборов только линейку.

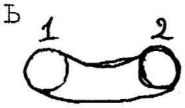
20. На наклонной плоскости лежит кирпич. Его тянут за веревку в горизонтальном направлении, пока он не сдвинется. В какую сторону он начнет двигаться? (Угол наклона – α, коэффициент трения – k.)

2I. При каком соотношении между R, r, α, m и M система будет в равновесии?

22. Стакан с водой равномерно вращают вокруг оси. Какую форму примет поверхность воды?

23. Тяжелая гибкая однородная веревка подвешена на двух гвоздях, расположенных на разной высоте. Будет ли ее нижняя часть иметь ось симметрии (вертикальную)?

24. (Продолжение) Определить форму веревки. (Эта кривая называется цепной линией.)

25. С вращающегося вала I усилие передается через ремень валу 2. В каком направлении следует вращать вал I, чтобы передаваемое усилие было больше? 

Учет решенных задач:

I 2 3 4 5 6 7 8 9 I0 II I2 I3 I4 I5 I6 I7 I8 I9 20 2I 22 23 24

II. Импульс

I. Полная масса песочных часов M. Их перевернули (при этом песок начал сыпаться) и поставили на весы. Что покажут весы?

2. Канат висит вертикально, касаясь земли. От него отрезают кусок, который падает на землю. Найти силу давления на землю как функцию времени. Масса куска – M, длина – L.

3. Кобра спала, свернувшись в клубок. Её разбудили и она поднимается вверх перед броском со скоростью V. Найти силу давления на Землю. Масса кобры M, длина L.

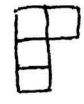
4. На двух одинаковых тележках едут с одинаковой скоростью два одинаковых дворника. Пошел снег. Один дворник сметает снег со своей тележки, а другой спит. Какая тележка проедет быстрее одно и то же расстояние?

5.* (Циолковский). На ракете массой M_1 включен реактивный двигатель, выбрасывающий продукты сгорания топлива со скоростью V относительно ракеты. Как изменится скорость ракеты после того, как все топливо сгорит? Масса топлива M_2.

Определение центра масс: I. Центр масс материальной точки совпадает с этой точкой. 2. Если O_1 – центр масс тела M_1, а O_2 – центр масс тела M_2, то центр масс системы из двух тел – точка O_3, для которой $\overrightarrow{O_1O_3} = M_2/(M_1+M_2)\ \overrightarrow{O_1O_2}$

6. Докажите, что центр масс определен корректно.

7. Найдите центры масс следующих систем: (I) три одинаковые массы в вершинах треугольника ABC; (2) пластинка треугольной формы и постоянной толщины; (3) тело, имеющее центр симметрии; (4) см. рисунки



8. Используя понятие центра масс, "докажите" следующие теоремы: (I) отрезки, соединяющие середины сторон четырехугольника, делятся точкой пересечения пополам; (2) (теорема Чевы) В треугольнике ABC отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=1$

I2. Законы сохранения

I. Доказать, что при абсолютно упругом лобовом ударе двух шаров относительные скорости до и после столкновения совпадают.

2. Вывести формулу для скоростей шаров после упругого лобового удара, если начальные скорости даны (см. предыдущую задачу).

3. На рельсах стоит гладкая горка массой M. Высота ее – H. На горку наезжает со скоростью V тележка массой m. Какую скорость приобретет горка, когда тележка с нее съедет? Переедет ли

тележка горку?

4. В желобе неподвижно лежат два тяжелых шара масс M_1 и M_2, между ними легкий шар массой m. Ему сообщают скорость V. Найти скорости тяжелых шаров после многих столкновений ($m \ll M_1, M_2$)

5. Какую максимальную часть своей энергии может передать движущийся шар массы M_1 покоящемуся шару массы M_2 после упругого столкновения с ним.

6. Из чего лучше делать замедлитель нейтронов в атомных реакторах: из воды или из свинца?

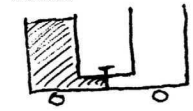
7. Докажите, что если происходит упругое столкновение двух одинаковых шаров, один из которых перед столкновением покоится, то они разлетаются под прямым углом.

8. Доказать, что при столновении (упругом) шара с гладкой стенкой угол падения равен углу отражения.

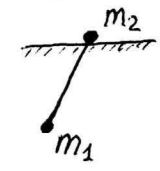
9. Ядро массой M, летящее со скоростью V, распадается на 2 осколка, летящие так, как показано на рисунке. Скорость одного из них V. Найти массы осколков и скорость второго осколка.

10. Безоткатное орудие стреляет прямой наводкой (т.е. в горизонтальном направлении) снарядами массой 10 кг. Скорость вылета снаряда 500 м/с. Если фиксацию орудия устранить, то скорость снаряда уменьшится до 495 м/с. Найти массу орудия.

11. На сколько сдвинется тележка сразу после того, как кран откроют и уровни воды выровняются? Масса всей системы M_1, масса воды M_2.



12. Найти период малых колебаний системы, изображенной на рисунке, если известно, что при фиксации m_2 период колебаний равен $2\pi\sqrt{\ell/g}$ Трения нет, массой стержня пренебречь.



13. Шар массы M движется по прямой, на которой расположены N других шаров. Подберите массы этих шаров так, чтобы после всех столкновений все шары имели равные импульсы.

14. На гладкую горку из задачи 3 тележка въезжает на высоту h, а затем скатывается обратно. Найти начальную скорость тележки, если массы тележки и горки равны m и M.

15. (Дж.И.Литлвуд) Свободный конец нерастяжимой пленки, скатанной в ролик, горизонтально прикреплен к наклонной плоскости. Ролик разматывается под действием силы тяжести. Линия соприкосновения имеет скорость 0, поэтому энергия не теряется. Куда же она девается?

Группы

Пусть в некотором множестве G определены: (I) операция $*$, ставящая в соответствие любым двум элементам $x, y \in G$ некоторый элемент $x * y$; (2) операция i, ставящая в соответствие любому $x \in G$ некоторый элемент $i(x)$; (3) некоторый элемент $n \in G$, причем выполняются такие свойства (для любых $x, y, z \in G$):

(I) $x * (y * z) = (x * y) * z$

(2) $x * n = n * x = x$

(3) $x * i(x) = i(x) * x = n$

В этом случае множество G называется группой.

В приводимых далее примерах групп мы иногда указываем лишь операцию $*$.

(I) Пусть $G = \mathbb{R}$, $x * y = x + y$, $n = 0$, $i(x) = -x$. Получается аддитивная группа $\mathbb{R}$.

(2) Заменив $\mathbb{R}$ на $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{C}$, получаем аддитивные группы рациональных, целых или комплексных чисел.

(3) Пусть $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x * y = x \cdot y$. Получается мультипликативная группа $\mathbb{R}^*$. (Здесь $\mathbb{R}$ также можно заменить на $\mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$ – но не на $\mathbb{Z}$!)

(4) Пусть M – некоторое множество, G – множество всех взаимно однозначных функций из M в M, $f * g$ – композиция f и g. Получается группа перестановок множества M.

(5) Группа движений плоскости состоит из всех движений (взаимно однозначных функций, сохраняющих расстояние), операция $*$ – композиция движений.

(6) Если рассматривать не все движения плоскости, а лишь те, которые отображают некоторое множество M точек плоскости на себя, получим группу симметрий множества M.

(7) Пусть $m \geq 1$ – некоторое натуральное число. Рассмотрим множество G всех возможных остатков при делении на m: $G = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Через $x * y$ обозначим остаток, который дает при делении на m сумма чисел с остатками x и y (напомним, что остаток от деления суммы определяется остатками слагаемых). Получающаяся группа обозначается $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

a \ b	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$a * b$ $\quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

(8) Пусть m – натуральное число. Рассмотрим остатки от деления на m, взаимно простые с m. (При $m = 4$ это I и 3, при простом m – I, 2, ..., $m-1$.) Через $x * y$ обозначим остаток, который дает при делении на m произведение чисел с остатками x и y. Оказывается,

a \ b	1	3
1	1	3
3	3	1

$a * b$ $\quad (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$

что $x * y$ лежит в нашем множестве. Возникающая группа обозначается $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

I. Указать, как нужно определить элемент n и операцию i в тех примерах, где это не указано.

2. Доказать, что (I) $x*(y*(z*t)) = ((x*y)*z)*t$; (2) если $x*y = x*z$, то $y = z$; (3) $i(x*y) = i(y)*i(x)$, $i(i(a)) = a$, $i(n) = n$; (4) $(a*x = b) \Leftrightarrow (x = i(a)*b)$.

3. Доказать, что если $n_1 * x = x$ при всех $x \in G$, то $n_1 = n$ ("единственность нейтрального элемента"). Доказать, что если $x*y = n$, то $y = i(x)$ ("единственность ").

4. Доказать, что для любого $a \in G$ функция $l_a : G \to G$, для которой $l_a(x) = a*x$, является взаимно однозначным отображением G в G. Чему равны $l_a \circ l_b$ и $(l_a)^{-1}$?

5. Доказать, что если операция $*$ на множестве G такова, что $x*(y*z) = (x*y)*z$ и для любых a и $b \in G$ найдутся такие x и y, что $a*x = b$, $y*a = b$, то можно определить функцию i и элемент n, превращающие G в группу.

Обычно операция в группе обозначается не $*$, а $\cdot$ или $+$ ("мультипликативная" и "аддитивная" записи). В соответствии с этим n обозначается через I или 0, а $i(x)$ – через $-x$ или x^{-1}. Аддитивная запись применяется для <u>коммутативных</u> (=<u>абелевых</u>) групп, в которых $x*y = y*x$.

6. Доказать, что если $x*x = n$ при всех $x \in G$, то G коммутативна.

В дальнейшем мы будем пользоваться в основном мультипликативной записью. Через x^n обозначается $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (n раз).

Говорят, что элемент a группы G <u>имеет конечный порядок</u>, если существует такое n, что $a^n = 1$. Наименьшее из таких n называется <u>порядком</u> элемента a.

7. Указать все элементы конечного порядка в (I) аддитивной группе $\mathbb{R}$; (2) мультипликативных группах $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$; (3) группе поворотов плоскости вокруг данной точки; (4) группе всех движений плоскости.

8. Доказать, что в конечной группе всякий элемент имеет конечный порядок. (Указание. В последовательности $1, a, a^2, \ldots$ есть совпадающие элементы.)

9. Элемент a имеет порядок k. Доказать, что $(a^n = 1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (n делится на k).

I0. Какие порядки могут иметь элементы группы перестановок множества из 9 элементов?

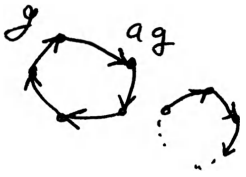
II. Найти порядки всех элементов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

I2. Доказать, что порядки элементов a и a^{-1} равны. Доказать, что порядки элементов ab и ba равны. Доказать, что порядки элементов abc, bca и cab равны.

I3. Элементы a и b группы G имеют конечный порядок. Можно ли утверждать, что элемент ab имеет конечный порядок?

I4. Порядок элемента a равен k. Чему равен порядок элемента a^n.

I5. Пусть a - элемент конечной группы G. Изобразим элементы G точками и проведем из каждого g стрелку в ag. Доказать, что стрелки образуют несколько циклов, не связанных друг с другом и содержащих одинаковое количество элементов.



I6. Пусть a - элемент конечной группы G. Доказать, что число элементов G (<u>порядок</u> G) делится на порядок a.

I7. (Теорема Ферма - Эйлера.) Пусть m - натуральное число, $\varphi(m)$ - количество чисел от 0 до $m-1$, взаимно простых с m, а число a взаимно просто с m. Доказать, что $a^{\varphi(m)}-1$ делится на m. (Указание. См. предыдущую задачу.)

I8. Вывести из утверждения предыдущей задачи "малую теорему Ферма": если p простое, то a^p-a делится на p.

I9. Придумать бесконечную группу, в которой каждый элемент имел бы конечный порядок (например, 2).

20. Существует ли группа из 4 элементов, в которой каждый элемент имел бы порядок 2 ?

2I. Доказать, что при простом p в группе $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ имеется элемент порядка $p-1$.

22. Будем многократно применять одно и то же преобразование к "кубику Рубика". Доказать, что рано или поздно он вернется в первоначальное положение.

<u>Группа перестановок</u>

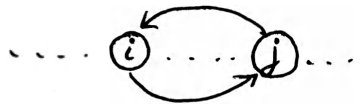
23. Пусть M - конечное множество из n элементов. Сколько элементов содержит группа перестановок множества M ?

24. Коммутативна ли эта группа?

25. Назовем <u>транспозицией</u> перестановку M, меняющую два элемента местами и оставляющую остальные элементы на месте: $a \longmapsto b$, $b \longmapsto a$, $x \longmapsto x$ при $x \neq a, b$. Доказать,

что всякая перестановка представляется в виде произведения транспозиций. (Расположенные в ряд предметы можно переложить как угодно, несколько раз поменяв местами пары предметов.)

26. Имеется n расположенных в ряд бирок, на которых написаны числа от I до n. Назовем <u>числом беспорядков</u> количество таких пар $\langle i, j \rangle$, что $i<j$, а i-ая бирка находится правее j-ой. Доказать, что при перестановке двух бирок четность числа беспорядков меняется (из четного оно делается нечетным и обратно).

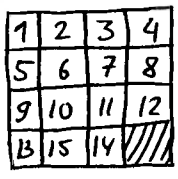


27. Доказать, что произведение нечетного числа транспозиций не может быть равно тождественной перестановке. (Указание. См. предыдущую задачу.)

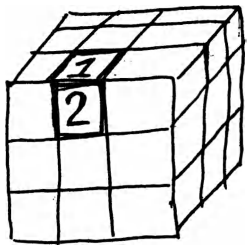
Перестановка называется <u>четной</u>, если она представима как произведение четного числа транспозиций, и <u>нечетной</u>, если она представима как произведение нечетного числа транспозиций.

28. Доказать, что никакая перестановка не является четной и нечетной одновременно, что произведение двух четных или двух нечетных четных четно, а произведение нечетной и четной перестановок нечетно.

29. Доказать, что количество четных перестановок равно количеству нечетных перестановок.



30. Доказать, что в игре "I5" нельзя поменять местами фишки "I4" и "I5", оставив остальные на месте и не нарушая правил игры.



3I. Доказать, что нельзя, играя с кубиком Рубика, добиться того, чтобы (I) указанные на рисунке грани I и 2 поменялись бы местами, а остальные грани остались бы на месте; (2) угловые кубики одной из граней циклически переставились, а все остальные кубики остались бы на местах (возможно, повернувшись!).

32. <u>Циклом</u> порядка k называется перестановка такого вида: k элементов переходят друг в друга по кругу, остальные переходят в себя. Доказать, что всякая перестановка представима в виде произведения независимых циклов (два цикла называются <u>независимыми</u>, если элементы, сдвигаемые одним, оставляются на месте другим).

33. Доказать, что всякая четная перестановка представима в виде произведения нескольких циклов длины 3.

34. Два элемента группы x и y называются <u>сопряженными</u>, если $x = hyh^{-1}$ для некоторого элемента h этой группы. Какие элементы сопряжены в группе перестановок?

Подгруппы

Пусть G - группа, H - некоторое подмножество G. Оно называется подгруппой, если $n \in H$, $i(x) \in H$ для любого $x \in H$ и $x * y \in H$ для любых $x, y \in H$.

Например, $\mathbb{Z}$ - подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$.

35. Доказать, что для любого n множество $n\mathbb{Z}$ всех кратных n является подгруппой в $\mathbb{Z}$. Есть ли в $\mathbb{Z}$ другие подгруппы?

36. Является ли подгруппой группы перестановок множества M множество перестановок, имеющих неподвижную точку (таких перестановок σ, что $\sigma(x) = x$ для некоторого $x \in M$)? Образуют ли подгруппу перестановки, оставляющие на месте данный элемент $x \in M$?

37. Найти все подгруппы группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

38. Найти все конечные подгруппы группы $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению.

39. Найти все подгруппы в группах симметрий правильного треугольника и квадрата.

40. Доказать, что для конечной группы G в определении подгруппы можно опустить условия $n \in H$ и $i(x) \in H$: если $x * y \in H$ для любых $x, y \in H$, то H - подгруппа. Существенна ли конечность G?

41. Пусть G - группа, $H \subset G$ - подгруппа. Для каждого элемента $a \in G$ через Ha обозначим все элементы G, которые можно получить, умножая какой-то элемент H на a: $Ha = \{ha \mid h \in H\}$. Доказать, что для любых a и b либо $Ha = Hb$, либо Ha не пересекается с Hb.

42. (Теорема Лагранжа.) Пусть G - конечная группа, H - ее подгруппа. Доказать, что порядок G делится на порядок H. (Порядок = число элементов.) (Указание. См. предыдущую задачу.)

43. Вывести из теоремы Лагранжа утверждение задачи 9.

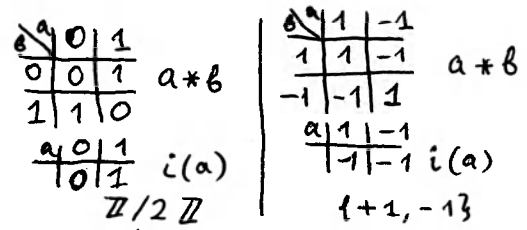
44. Пусть H - подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$. Доказать, что либо H состоит из всех кратных некоторого действительного числа α, либо H всюду плотно в $\mathbb{R}$ (т.е. в любом интервале есть элемент H).

45. Вывести из предыдущей задачи, что дробная часть числа $n\sqrt{2}$ при некотором $n \neq 0$ меньше 0.0001. (Указание. Числа $m + n\sqrt{2}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ образуют подгруппу в $\mathbb{R}$.)

46. Найти все конечные подгруппы (1) группы поворотов плоскости вокруг данной точки; (2) группы всех движений плоскости, для которых данная точка неподвижна.

Изоморфизм

Группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ остатков от деления на 2 по существу тождественна группе $\{+1, -1\}$ по умножению. Можно считать, что мы имеем дело по существу с одной и той же группой, а различаются лишь обозначения элементов: $0 \leftrightarrow 1$, $1 \leftrightarrow (-1)$. Говорят, что эти группы изоморфны, а функция $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto -1$ есть их изоморфизм.



Определение. Пусть G и H – две группы. Функция $f: G \to H$ называется <u>изоморфизмом</u>, если f взаимно однозначна и выполнены такие свойства: (1) $f(n_G) = n_H$; (2) $f(i_G(a)) = i_H(f(a))$; (3) $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$. Здесь n_G, i_G и $*_G$ – операции в G, а n_H, i_H, $*_H$ – операции в H. Группы называются <u>изоморфными</u>, если существует изоморфизм одной из них в другую (тогда обратное отображение – также изоморфизм).

47. Указать изоморфные среди следующих групп: группа симметрий треугольника, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, группа перестановок множества из 3 элементов, группа кубических комплексных корней из 1 по умножению.

48. Две группы изоморфны третьей. Можно ли утверждать, что они изоморфны между собой?

49. Очевидно, изоморфные группы имеют одинаковое число элементов. Верно ли обратное?

50. Доказать, что любая группа из 2 элементов изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а любая группа из 3 элементов изоморфна $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

51. Верно ли аналогичное утверждение для групп из 4 и 5 элементов?

52. Изоморфны ли группы (1) $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ (по сложению); (2) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$ (по сложению); (3) $\mathbb{R}$ по сложению и $\mathbb{R}^*$ (ненулевые действительные числа по умножению); (4) $\mathbb{R}$ по сложению и $\mathbb{R}^+$ (положительные действительные числа по умножению)?

53. Рассмотрим группу $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ пар рациональных чисел по сложению (сложение – покомпонентное). Изоморфна ли она группе $\mathbb{Q}$? Изоморфна ли группа $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (определенная аналогичным образом) группе $\mathbb{Z}$?

54. Изоморфна ли группа $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ группе $\mathbb{R}$?

55. Найти подгруппу группы $\mathbb{C}^*$ (ненулевые комплексные числа по умножению), изоморфную группе поворотов плоскости вокруг фиксированной точки.

56. Существуют ли в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ подгруппы, изоморфные $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$?

57. Доказать, что всякая группа, содержащая неединичный элемент, содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ при некотором $n>1$ или изоморфную $\mathbb{Z}$.

58. Найти в группе перестановок множества из n элементов подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

59. Доказать, что всякая группа G изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок множества G. (Указание. См. задачу 4.)

60. Обозначим через $\mathbb{Z}^n$ группу, элементами которой являются кортежи из n целых чисел, $\langle a_1,\dots,a_n\rangle+\langle b_1,\dots,b_n\rangle=\langle a_1+b_1,\dots,a_n+b_n\rangle$. Доказать, что всякая подгруппа группы $\mathbb{Z}^n$ изоморфна $\mathbb{Z}^k$ при некотором k, причем $k\leqslant n$.

61. Доказать, что $\mathbb{Z}^m$ и $\mathbb{Z}^n$ не изоморфны при $m\neq n$.

62. Доказать, что все группы данного простого порядка p изоморфны (следовательно, изоморфны $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и, следовательно, коммутативны).

63. Определим прямую сумму групп G и H как группу $G\oplus H$, элементами которой являются пары $\langle g,h\rangle$ с $g\in G$, $h\in H$, операции – покомпонентные. Доказать, что $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$ изоморфно $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$, если a и b взаимно просты.

64. Доказать, что для любого элемента g группы G отображение $S_g: h\mapsto ghg^{-1}$ является изоморфизмом группы G на себя.

Гомоморфизмы

Пусть G, H группы. Функция $f: G\to H$ называется гомоморфизмом, если $f(g_1 *_G g_2)=f(g_1)*_H f(g_2)$, $f(i_G(g))=i_H(f(g))$ и $f(n_G)=n_H$. (Ср. определение изоморфизма.) Тривиальный пример гомоморфизма: $f(g)=n_H$ для всех $g\in G$.

65. Придумать примеры нетривиальных гомоморфизмов (1) группы перестановок в группу $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; (2) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; (3) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; (4) группы $\mathbb{R}^*$ ненулевых действительных чисел по умножению в группу $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; (5) группы $\mathbb{R}^*$ в группу $\mathbb{R}^+$ положительных действительных чисел по умножению; (6) группы $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению в $\mathbb{R}^+$; (7) группы $\mathbb{C}^*$ в группу $T=\{z\mid |z|=1\}$ по умножению; (8) группы $\mathbb{R}$ по сложению в группу T; (9) группы движений плоскости в группу всех движений плоскости, оставляющих данную точку неподвижной; (10) аддитивной группы $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^+$.

66. Найти все гомоморфизмы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$.

67. Сколько имеется различных гомоморфизмов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}^*$?

68. Группа $\mathbb{Z}$ и элемент $1 \in \mathbb{Z}$ обладают следующим свойством: для всякой группы G и элемента $a \in G$ существует единственный гомоморфизм $f: \mathbb{Z} \to G$, при котором $f(1) = a$. Доказать.

69. Придумать группу S и два элемента $m, n \in S$ так, чтобы выполнялось следующее свойство (см. предыдущую задачу): для всякой группы G и элементов $a, b \in G$ существует единственный гомоморфизм $f: S \to G$, для которого $f(m) = a$, $f(n) = b$. Группа с таким свойством называется свободной группой с двумя образующими.

70. Доказать, что любые две свободные группы с двумя образующими изоморфны.

71. Пусть $f: G \to H$ - гомоморфзим. Доказать, что ядро $\ker f = \{g \in G \mid f(g) = n_H\}$ и образ $\operatorname{im} f$ (= множество значений f) являются подгруппами групп G и H.

72. Пусть $f_1: G \to H_1$ и $f_2: G \to H_2$ - гомоморфизмы, причем $\ker f_1 = \ker f_2$. Доказать, что группы $\operatorname{im} f_1$ и $\operatorname{im} f_2$ изоморфны.

73. Пусть $f: G \to H$ - гомоморфизм. Доказать, что прообразы всех элементов $\operatorname{im} f$ содержат равное число элементов.

74. Доказать, что если $f: G \to H$ - гомоморфизм, G конечна, то (число элементов G) = (число элементов $\operatorname{im} f$)·(число элементов $\ker f$).

Задача 72 показывает, что образ гомоморфизма $f: G \to H$ определяется (с точностью до изоморфизма) самой группой G и ядром гомоморфизма. Пусть G - группа. Подгруппа $H \subset G$ называется нормальным делителем, если H есть ядро некоторого гомоморфизма f группы G в некоторую другую группу G'. Образ этого гомоморфизма (определяемый однозначно с точностью до изоморфизма) называется факторгруппой G по H и обозначается G/H.

75. Доказать, что для любой группы G подгруппы $\{n\}$ и G - нормальные делители и найти факторгруппы.

76. Найти факторгруппу аддитивной группы $\mathbb{R}$ по подгруппе $\mathbb{Z}$ целых чисел. (Ответ: T.)

77. Найти факторгруппы $\mathbb{C}^*$ по T, $\mathbb{C}^*$ по $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^*$ по $\mathbb{R}^+$.

78. Найти факторгруппу группы движений плоскости по подгруппе параллельных переносов.

79. Пусть $f: G \to H$ - гомоморфизм. Доказать, что $f(g_1) = f(g_2) \Leftrightarrow g_1^{-1} \cdot g_2 \in \ker f$.

80. Доказать, что если H - нормальный делитель G, то $g_1^{-1} \cdot g_2 \in H \Leftrightarrow g_2 \cdot g_1^{-1} \in H$.

81. Пусть H – нормальный делитель G. Будем говорить, что $x \in G$ эквивалентно $y \in G$ по H, если $x^{-1}y \in H$. Показать, что разбивается на классы эквивалентных друг другу элементов, и множество этих классов находится во взаимно однозначном соответствии с группой G/H.

82. Доказать, что если подгруппа $H \subset G$ такова, что $g_1^{-1}g_2 \in H$ равносильно $g_2 g_1^{-1} \in H$, то H – нормальный делитель. (Указание. См. предыдущую задачу.)

83. Доказать, что следующие свойства подгруппы G группы H равносильны: (1) H – нормальный делитель G; (2) $xy \in H \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow yx \in H$; (3) $h \in H$, $g \in G \Rightarrow ghg^{-1} \in H$; (4) для всякого элемента $g \in G$ множества $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ и $gH = \{gh \mid h \in H\}$ совпадают.

84. Доказать, что в коммутативной группе всякая подгруппа является нормальным делителем.

85. Какие подгруппы группы S_3 перестановок трехэлементного множества – нормальные делители? Найти соответствующие факторгруппы.

86. Подгруппа конечной группы содержит ровно половину её элементов. Доказать, что эта подгруппа – нормальный делитель и найти факторгруппу.

87. Найти факторгруппу группы T по подгруппе корней степени n из единицы. (Указание. Какие существуют гомоморфизмы T в себя?)

88. Доказать, что единственной нормальной подгруппой группы перестановок множества из n элементов при $n \geq 5$ является подгруппа четных перестановок.

Действие групп на множествах

Пусть G – группа, M – некоторое множество. Действием G на M называет гомоморфизм G в группу перестановок множества M. Перестановка, соответствующая элементу g, будет обозначаться T_g. (Таким образом, согласно определению гомоморфизма, $T_{gh}(m) = T_g \circ T_h(m)$.)

Пример. Каждая группа G действует на себе "левыми сдвигами": $T_g(x) = gx$.

89. Проверить, что это действительно действие. Можно ли заменить левые сдвиги на правые (т.е. положить $T_g(x) = xg$)?

Пусть G действует на множестве M. Назовем орбитой точки $m \in M$ множество всех точек, в которые она может перейти под действием преобразований, соответствующих элементам g: $O(m) = \{T_g(m) \mid g \in G\}$

90. Доказать, что орбиты разных точек множества M либо не пересекаются, либо совпадают.

91. Группа T (комплексных чисел с модулем 1 по умножению) действует на множестве $\mathbb{C}$ умножениями: $T_g(m) = g \cdot m$ $(g \in T, m \in \mathbb{C})$. Каковы будут орбиты?

92. Пусть H – подгруппа G. Рассмотрим действие H на G левыми сдвигами: $T_h(g) = hg$. Что будет орбитами?

Пусть G действует на M, $m \in M$. Рассмотрим множество тех $g \in G$, при которых $T_g(m) = m$.

93. Доказать, что это – подгруппа (называемая <u>стабилизатором</u> точки m).

94. Конечная группа G действует на M, $m \in M$. Доказать, что (число элементов G) = (число элементов орбиты m) · (число элементов стабилизатора m).

95. Рассмотрим естественное действие группы S_{10} (перестановок десятиэлементного множества) на множестве всех последовательностей русских букв длины 10. Подсчитать величины, входящие в равенство предыдущей задачи, если m = "МАТЕМАТИКА".

96. Пусть G – группа. Рассмотрим действие G на себе <u>сопряжениями</u>: $T_g(h) = ghg^{-1}$. Орбиты этого действия называются <u>классами сопряженных элементов</u>. Каковы они, если G коммутативна? если G – группа перестановок?

97. Доказать, что если число элементов группы G равно p^k, где p – простое, то количество элементов ее <u>центра</u> (множества элементов, коммутирующих со всеми элементами G, т.е. таких x, что $xy = yx$ для всех $y \in G$) кратно p (и, в частности, больше 1). (Указание. См. предыдущую задачу.)

98. Доказать, что всякая группа порядка p^2, где p – простое число, коммутативна.

99. Доказать, что всякая конечная коммутативная группа изоморфна прямой сумме нескольких групп вида $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

100. Назовем <u>коммутатором</u> элементов группы a, b элемент $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$. Доказать, что $ab = ba \Leftrightarrow [a,b] = 1$. Доказать, что множество всевозможных произведений коммутаторов – нормальный делитель, называемый <u>коммутантом</u>. Доказать, что для любого нормального делителя N группы G (G/N коммутативна) $\Leftrightarrow$ (N содержит коммутант G)

101. Доказать, что группа, в которой $x^2 = 1$ при всех x, либо бесконечна, либо имеет порядок, равный степени 2. Доказать, любые две группы с таким свойством и одинаковым числом элементов изоморфны.

О проведении итогового зачета по программе 7 класса

I. Итоговый зачет будет происходить 27 и 28 мая 1983 года для учеников 7б класса 57 школы. На зачет будут приглашены преподаватели математики других классов. Оценка за зачет будет сообщена в день зачета, после его окончания. Она не влияет на четвертную и годовую оценки.

2. Порядок проведения зачета. Каждый участник зачета получает (выбранный случайным образом) билет, состоящий из трех частей:

1. Вопрос по алгебре.
2. Вопрос по геометрии.
3. Задача по геометрии.

После получения билета дается время на подготовку (не менее 30 минут). После этого происходит ответ у доски. После него могут быть заданы дополнительные вопросы (число которых заранее не ограничено).

3. Требования к участникам зачета. Программа зачета включает в себя обязательный материал, изучавшийся на уроках математики. Он включает в себя, помимо соответствующих разделов учебников, следующие понятия:

пересечение, объединение и разность множеств, вложение, наложение, взаимно однозначная функция, образ, прообраз, композиция функций, соизмеримые отрезки и числа, наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное, простые числа, взаимно простые числа, модуль числа, вычитание, деление, отношения "меньше" и "больше" на действительных числах, корень, равномощность множеств, счетное множество.

Определения всех этих понятий должны быть известны участникам зачета.

4. Вопросы, входящие в билеты.

АЛГЕБРА

I. Координатная прямая. Формула расстояния.

2. Координаты на плоскости. Формула расстояния. Уравнение окружности.

3. Уравнение прямой.

4. Рациональные числа и соизмеримые отрезки. Теорема: отрезки длиной A и B соизмеримы тогда и только тогда, когда A/B рационально.

5. Иррациональность квадратного корня из 2.

6. Аксиома Архимеда и её следствие: если A не превосходит I/K при всех натуральных K, то A меньше или равно 0.

7. Теорема: в любом интервале найдутся рациональное и иррациональное числа.

8. Делимость целых чисел. Остатки. Теорема: остаток от деления АВ и А+В на К определяется остатками от деления А и В на К.

9. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Теорема: для любого К есть К идущих подряд составных чисел.

10. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.

11. Теорема: (существуют такие Х и У, что С=АХ+ВУ) равносильно (С делится на НОД(А,В)).

12. Теорема: наибольший общий делитель кратен любому делителю.

13. Основная теорема арифметики (единственность разложения на простые множители).

14. Решение уравнений вида АХ+ВУ=С в целых числах.

15. Аксиомы сложения действительных чисел. Определение вычитания. Правило раскрытия скобок.

16. Аксиомы умножения. Определение деления. Правила действий с дробями. Условие равенства дроби нулю.

17. Аксиомы порядка. Отношения "больше" и "меньше". Простейшие свойства неравенств.

18. Аксиома существования корня из положительного числа. Функция "корень К-ой степени" и её свойства.

19. Неравенство о среднем арифметическом и геометрическом двух чисел и неравенство Бернулли ($(1+X)^K \geqslant 1+KX$)

20. Квадратный трехчлен. Выделение полного квадрата. Формула корней квадратного уравнения.

21. Построение графика квадратного трехчлена.

22. Теорема, обратная теореме Виета.

23. Теорема Виета.

24. Разложение квадратного трехчлена на множители.

25. Решение неравенств вида $AX^2 + BX + C \quad 0$

26. Равномощность множеств. Равномощность любых отрезков. Равномощность интервала и прямой.

27. Счетные множества. Счетность множеств целых и рациональных чисел.

28. Счетность множества конечных последовательностей натуральных чисел и множества конечных подмножеств множества натуральных чисел.

29. Объединение конечного или счетного числа счетных множеств счетно. Если А и В счетны, то $A \times B$ счетно.

30. Бесконечное множество содержит счетное подмножество. Бесконечное подмножество счетного множества счетно.

31. Если А конечно или счетно, а В бесконечно, то объединение множеств А и В равномощно множеству В.

Итоговый зачет - 3

ГЕОМЕТРИЯ

I. Три признака равенства треугольников (формулировки)

2. Свойства равнобедренного треугольника (равенство углов, совпадение медианы, биссектрисы, высоты).

3. Множества точек, равноудаленных от двух точек и от двух прямых.

4.Теорема: против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

5. Аксиома параллельных. Равенство внутренних накрестлежащих углов необходимо и достаточно для параллельности.

6. Теорема о сумме углов треугольника.

7. Параллелограмм, его свойства и признаки.

8. Прямоугольник, ромб, квадрат (определения, свойства, признаки)

9. Средняя линия треугольника и трапеции.

I0. Простейшие построения: откладывание угла, деление пополам отрезков и углов, построение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через данную точку, построение параллельных.

II. Окружность. Дуга окружности. Величина дуги. Теорема о вписанном угле.

I2. Определение касательной к окружности. Свойства касательной. Построение касательной к окружности, проходящей через данную точку.

I3. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

I4. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

I5. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке - центре описанной окружности.

I6. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке - центре вписанной окружности.

I7. Теорема: две прямые, пересекающие три параллельные прямые, делятся ими на пропорциональные отрезки. (Рассмотреть случай несоизмеримости.)

I8. Построение общих касательных к двум окружностям.

I9. Определение синуса и косинуса. Теорема синусов.

20. Теорема Пифагора и обратная к ней.

2I. Теорема косинусов.

22. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы четырехугольник был вписанным в окружность.

23. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность.

24. Определение подобные треугольников. Подобие треугольников по двум сторонам и углу между ними.

Итоговый зачет – 4

25. Признаки подобия треугольников по трем сторонам и двум углам.

26. Биссектриса делит основание треугольника на части, пропорциональные боковым сторонам.

27. Пропорциональные отрезки в круге: произведение отрезков секущей, проходящей через данную точку, не зависит от выбора секущей.

28. Аксиомы площади. Площадь прямоугольника.

29. Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции.

Математический анализ, часть I. (Основные понятия.)

I. Последовательности и пределы. Определение предела. Сходящаяся последовательность ограничена. Единственность предела. Перестановка и выбор подпоследовательности сохраняют предел. Теорема о двух милиционерах.

2. Арифметические операции и пределы. Пределы суммы, разности, произведения и частного. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Вычисление пределов вида $P(n)/Q(n)$, где P и Q – многовлены, $P(n)/a^n$ и др.

3.* Метрические пространства. Определения и примеры. Пределы и предельные точки. Открытые и замкнутые множества, внутренность и замыкание.

4. Аксиома полноты и её следствия. Точная верхняя грань. Вложенные отрезки. Монотонная ограниченная последовательность. Всякая ограниченная последовательность имеет предельную точку. Несчетность множества действительных чисел. Критерий Коши. Лемма Гейне – Бореля.

5. Ряды. Определение суммы. Необходимое условие сходимости. Ряды с неотрицательными членами. Признак сравнения. Ряды вида a^n, $1/n^k$. Знакопеременные ряды, признак Лейбница. Абсолютно сходящиеся ряды, их сходимость. Перестановка и группирование членов абсолютно сходящегося ряда. Перестановка членов не абсолютно сходящегося ряда. Представление действительных чисел в виде десятичных дробей.

6.* Построение системы действительных чисел.

Далее предполагаются: часть 2 (непрерывность), часть 3 (производная) и ч. 4 (интеграл).

Кольцо многочленов.

Степени. Сокращение на ненулевой многочлен. Значение многочлена в точке. Корни. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. Деление с остатком. Теорема Безу. Формулы Виета. Интерполяция. НОК и НОД для многочленов. Алгоритм Евклида. Решение уравнений вида $AX + BY = C$ в кольце многочленов. Разложение на множители и его однозначность. Формулировка основной теоремы алгебры. Разложение на множители многочленов с вещественными и комплексными коэффициентами. Многочлены с рациональными и целыми коэффициентами. Лемма Гаусса, разложение на множители.