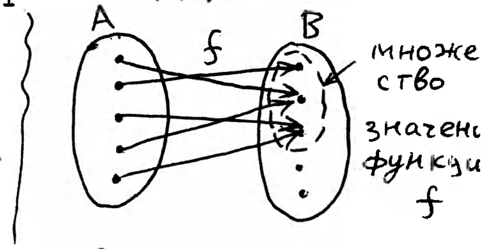
Листок 4. Функции.

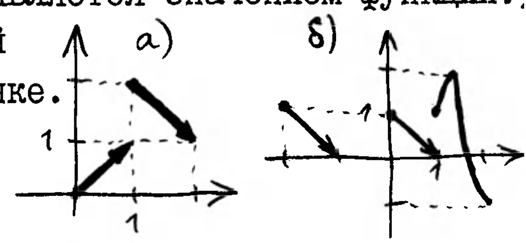
Напоминание. Пусть $f: A \to B$. Тогда множество A называется областью определения функции f, а множество всех $y \in B$, которые являются значениями функции f на некоторых $x \in A$, называется множеством значений функции f.



Задачи.

1. Определить множество значений функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если: а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = |x| + 1$; в) $f(x) = |x+1|$.
(Чтобы доказать, что множество значений функции f равно некоторому X, нужно доказать два утверждения: (1) все значения функции f принадлежат X; (2) любой элемент X является значением функции.)

2. Найти области определения и значений функций, графики которых изображены на рисунке.



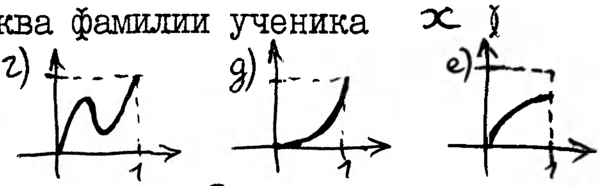
3. Найти область значений функций:
а) $f(x) = \begin{cases} |x| \text{ при } x \in [-3, 2] \\ \text{не определено иначе} \end{cases}$
б) $g(x) = [x]$; в) $h(x) = \{x\}$.

4. Построить функции: а) с областью определения $]-1, 1[$ и областью значений $[0, 2[$; б)* с областью определения $[-1, 1]$ и областью значений $]-1, 1[$; в)* с областью определения $]-1, 1[$ и областью значений $[-1, 1]$; г)* с областью определения $]0, 1[$ и областью значений $\mathbb{R}$.

Определения. Функция $f: A \to B$ называется: а) наложением, если область значений ее совпадает с B; б) вложением, если различным элементам A соответствуют различные элементы B: из $x \neq y$ следует $f(x) \neq f(y)$; в) взаимно однозначным соответствием между A и B если она одновременно является и вложением, и наложением.

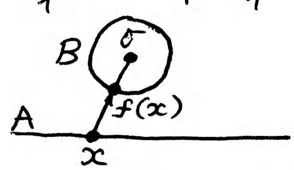
5. Какие из приведенных ниже функций являются наложениями, вложениями и взаимно однозначными соответствиями?

а) A = множество учеников 7б класса, B = множество всех букв русского алфавита, $f: x \mapsto$ (первая буква фамилии ученика x)
б) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $f: x \mapsto [x]$
в) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$, $f: x \mapsto x$

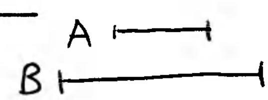


В пунктах г – е $A = [0, 1]$, $B = [0, 1]$.

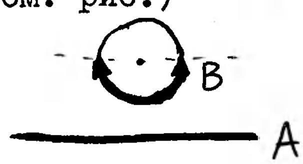
ж) A = прямая, B = окружность, $f(x)$ = точка пересечения луча Ox с окружностью.



6. Придумать взаимно однозначное соответствие $f: A \to B$, если: а) A, B – отрезки (см. рис.)



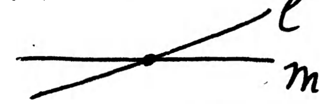
б) $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$;
в)* A – прямая, B – полуокружность (без концов), г)* $A =]0, 1[$, $B = \mathbb{R}$



д)* $A =]0, 1]$, $B = [0, 1]$; е) A = множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, B = множество четных натуральных чисел; ж)* $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$; з)* $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$

Листок Д. I. Функции (дополнительные задачи).

Обозначения. Пусть $f: A \to B$, $g: B \to C$. Функция (=отображение) $x \mapsto g(f(x))$ называется <u>композицией</u> функций f и g и обозначается $g \circ f$. Таким образом, $g \circ f(x) = g(f(x))$.



I. Прямые ℓ и m образуют угол в 7°. Обозначим через f отображение осевой симметрии относительно ℓ , а через g – относительно m . Найти $g \circ f$ и $f \circ g$.

2. Пусть A и B – две точки, f и g – центральные симметрии относительно A и B . Найти $f \circ g$ и $g \circ f$.

3. Точка O называется <u>центром симметрии</u> множества M (состоящего из точек плоскости), если при центральной симметрии относительно O множество M переходит в себя. Доказать, что если множество M имеет более одного центра симметрии, то оно имеет бесконечно много центров симметрии.

4. Рассмотрим 8 отображений плоскости в себя, задаваемых (в координатах) формулами $\langle x,y\rangle \mapsto \langle \pm x, \pm y\rangle$ (4 варианта) и $\langle x,y\rangle \mapsto \langle \pm y, \pm x\rangle$ (4 варианта). Убедиться, что композиция любых двух отображений этого списка снова входит в список, и составить таблицу умножения (из 8 строк и 8 столбцов).

5. Взаимно однозначное отображение (=функция) $f: A \to A$, где A – конечное множество, называется <u>перестановкой</u> множества A . Обычно в качестве A берут множество $\{1, 2, \ldots, k\}$ и перестановку записывают в виде таблицы из двух строк; например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ или, короче, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ обозначает перестановку, переводящую I в 3, 3 в I, а 2 и 4 – в себя. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Найти перестановку f множества $\{1,2,3,4\}$, для которой
$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Доказать, что для любой перестановки f найдется такое n , что $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}} = e$ (через e обозначена <u>тождественная</u> перестановка, оставляющая все числа на месте). Наименьшее такое n называется <u>порядком</u> перестановки f .

8. Существуют ли перестановки множества $\{1,2,3,4,5\}$, имеющие порядок: а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 7?

9. Найти число перестановок множества из k элементов.

IO. <u>Транспозицией</u> называется перестановка, меняющая два числа местами и оставляющая все остальные числа на месте. Доказать, что если композиция n транспозиций равна e , то число n четно.

II. Доказать, что всякая перестановка представляется в виде композиции транспозиций.