

Листок 6. Действительные числа: умножение.

Аксиомы умножения. Для любых чисел x, y определено их произведение, обозначаемое xy . Для каждого числа x , не равного 0, определено обратное число, обозначаемое $\frac{1}{x}$. Среди чисел имеется число единица, обозначаемое 1. При любых x, y и z

У1. $x \cdot y = y \cdot x$ (коммутативность)

У2. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (ассоциативность)

У3. $x \cdot 1 = x$

У4. Если $x \neq 0$, то $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

У5. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (дистрибутивность)

У6. $1 \neq 0, 1 + 1 \neq 0, 1 + 1 + 1 \neq 0, \dots$

У7. $0 \cdot x = 0$

Задачи.

1. $((a \cdot b) \cdot c) \cdot d = a \cdot (b \cdot (c \cdot d))$

2. (Правило сокращения на ненулевое число) Если $xy = xz$
и $x \neq 0$, то $y = z$.

3. Если $x \cdot y = 0$, то $x = 0$ или $y = 0$.

4. Если $x \cdot y = 1$, то $\frac{1}{y} = x$.

5. Если $y = \frac{1}{x}$, то $x = \frac{1}{y}$.

6. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

7. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

8. $a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$

Обозначения. Число $a \cdot \frac{1}{b}$ обозначается $\frac{a}{b}$. Это обозначение имеет смысл при $b \neq 0$. Если $a \neq 0$, то $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$.

Правила действий с дробями (задачи 9 - 16)

9. (Равенство) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

10. (Сокращение) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, если $c \neq 0$.

11. (Сложение дробей с одним знаменателем) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

12. (Сложение дробей с разными знаменателями) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

13. (Вычитание) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

14. (Умножение) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

15. (Деление) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

16. (Равенство нулю) Пусть $b \neq 0$. Тогда $\frac{a}{b} = 0$ в том и только том случае, когда $a = 0$.

17.* Вывести У7 из аксиом У1 - У6 и аксиом С1 - С4.

18. Доказать, что если $x + x + x = 0$, то $x = 0$. (Указание. См. У6.)