

Листок 7. Действительные числа: порядок.

Всякое действительное число, не равное нулю, либо положительно, либо отрицательно. Никакое число не может быть положительным и отрицательным одновременно. Ноль не является ни положительным, ни отрицательным. Выполняются такие свойства:

П1. Если  $x$  положительно, то  $-x$  отрицательно. Если  $x$  отрицательно, то  $-x$  положительно.

П2. Если  $x$  и  $y$  положительны, то  $x+y$  и  $x \cdot y$  положительны.

П3. Число 1 положительно.

Задачи.

1. Если  $x$  отрицательно, а  $y$  положительно, то  $x \cdot y$  отрицательно. (Указание. См. свойство П3.) Если  $x$  и  $y$  отрицательны, то  $x \cdot y$  положительно.

2. Число  $x^2$  не может быть отрицательным.

3. При всех  $x$  и  $y$  число  $x^2 + y^2 + 1$  положительно.

4. При всех  $x$  число  $x^2 + 2x + 2$  положительно.

5. Докажите, что если  $(x-y)^2 + (2x+y-3)^2 = 0$ , то  $x=1, y=1$ .

6.\* Вывести П3 из П1 и П2.

7.\* Числа  $a, b, c, d, e, f$  не равны нулю. Доказать, что среди чисел  $ab, ac, bd, -ce, -df, -ef$  есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное.

Определения. Число  $a$  больше  $b$  ( $a > b$ ), если  $a - b$  положительно. Число  $a$  меньше  $b$  ( $a < b$ ), если  $a - b$  отрицательно. Очевидно, всегда выполнено одно из трех:  $a < b, a = b, a > b$ ;

$a < b$  тогда и только тогда, когда  $b > a$ ,  $a > 0$  тогда и только тогда, когда  $a$  положительно,  $a < 0$  тогда и только тогда, когда  $a$  отрицательно. Обозначения:  $a \geq b$  означает " $a > b$  или  $a = b$ ",  $a \leq b$  означает " $a < b$  или  $a = b$ ".

8. Если  $a < b, b < c$ , то  $a < c$ .

9. Если  $a < b, c$  - любое число, то  $a + c < b + c$ .

10. Если  $a < b, c > 0$  то  $ac < bc$ .

11. Если  $a < b, c < 0$  то  $ac > bc$ .

12. Если  $a < b, c < d$ , то  $a + c < b + d$ .

13. Если  $a > 0$ , то  $\frac{1}{a} > 0$ ; если  $a < 0$ , то  $\frac{1}{a} < 0$ .

14. Если  $a > b > 0$ , то  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

15. Если  $a < b, c < d$ , то  $a - d < b - c$ .

16. Если  $a > b > 0, c > d > 0$  то  $ac > bd$ .

17. Если  $x > 0, y > 0, n$  - натуральное число, большее 0, то свойства  $x > y$  и  $x^n > y^n$  равносильны.

18. Известно, что  $x^3 = 2, y^7 = 5, x, y > 0$  Что больше:  $x$  или  $y$ ?

19. Если  $x^{1983} > 0$ , то  $x > 0$ .

20. Верны ли такие утверждения: а)  $\frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$ ;

б)  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a < b$ ; в)  $a^2 \leq b^2 \Rightarrow |a| \leq |b|$ ?