СКОЛЬКО ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ ?

1. На кружок пришли школьники из n различных школ. Из каждой школы было ровно n человек: один первоклассник, один второклассник,..., один n-классник. Можно ли всех выстроить в квадрат $n \times n$ так, чтобы ни в одном ряду и ни в одной колонне не оказалось двух ребят из одной школы или из одинаковых классов, если (а) $n = 3$; (б) $n = 5$; (в) $n = 4$; (г)* $n = 6$?

Определение. Пусть в множестве Π (элементы которого мы будем называть <u>точками</u>) выделены некоторые подмножества (мы будем называть их <u>прямыми</u>) так, что выполнены следующие свойства (аксиомы):

АП1. В множестве Π существуют 3 точки, не принадлежащие одной прямой.

АП2. Для любых двух различных точек Π существует <u>ровно</u> одна прямая, которая их содержит.

АП3. Для любой прямой ℓ и любой точки A существует <u>ровно</u> одна прямая, которая содержит A и параллельна ℓ (параллельными называются совпадающие или не пересекающиеся прямые).

В таком случае множество Π называется (аффинной) <u>плоскостью</u>.

2. Доказать, что на плоскости не менее 4 точек.

3. Привести пример плоскости из 4 точек.

4. Может ли плоскость иметь ровно (а) 5; (б) 7; (в) 9 точек?

5. Может ли на одной прямой плоскости быть 4 точки, а на другой – 5 точек?

6. Докажите, что на любых двух прямых плоскости одинаковое число точек.

7. Пусть на прямой n точек. (а) Сколько точек на плоскости? (б) Сколько на этой плоскости прямых?

8. Придумать плоскость, прямая на которой содержит (а) 3 точки; (б) 5 точек; (в) 4 точки; (г)* p точек (p – простое).

9.* Может ли прямая на плоскости содержать (а) 6; (б) 9 точек?

10. (Проективная плоскость.) Система линий метро в городе Великий Гусляр устроена так, что с любой станции на любую можно проехать без пересадки, а любые две линии имеют ровно одну общую станцию, и линий не менее двух. Доказать, что (а) станций не меньше 7; (б) если закрыть все станции одной линии, то получится аффинная плоскость (как?); (в) число станций равно числу линий; (г) найти число станций, если на линии n станций.

11. Какое наибольшее число клеток в квадрате (а) 7 на 7; (б) 13 на 13 можно закрасить так, чтобы никакие 4 закрашенные клетки не оказались в углах прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата?